



Inversion linéarisée de profils de sismique marine en milieu stratifié élastique

Frederic Moinet

► To cite this version:

Frederic Moinet. Inversion linéarisée de profils de sismique marine en milieu stratifié élastique. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. NNT: . tel-00739820

HAL Id: tel-00739820

<https://theses.hal.science/tel-00739820>

Submitted on 9 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

THESE

présentée par

Frédéric Moinet

pour obtenir le titre de DOCTEUR de

L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité: **Géophysique - Géochimie - Géomécanique**

Inversion linéarisée de profils de sismique marine en milieu stratifié élastique

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail : ptalour@ujf-grenoble.fr

Date de soutenance: 18 novembre 1997

Composition du jury:

Michel Campillo	Président	Professeur, Université de Grenoble
Michel Dietrich	Directeur de thèse	Chargé de recherche au CNRS, Grenoble
Dominique Fattaccioli	Examineur	Ingénieur, Thomson, Toulon
François Glangeaud	Examineur	Directeur de recherche au CNRS, Grenoble
Georges Pascal	Rapporteur	Professeur, Université de Versailles
Antonio Pica	Examineur	Ingénieur, Compagnie Générale de Géophysique, Massy
Jean Virieux	Rapporteur	Professeur, Université de Nice

C'est avec grande émotion que le
OBSERVATOIRE DE GRENOBLE *docteur Moinet*
le dédicace le
et
LABORATOIRE DE GEOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

THESE

présentée par

Frédéric Moinet

pour obtenir le titre de DOCTEUR de

L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité: **Géophysique - Géochimie - Géomécanique**

Manuscrit. Viva le
Portugal et ma foi,
Espérons qu'un jour nous
ferons la tournée de
grands ducs à
PAN AR,
Histoire de tester
le Roi sur les
terres.

Inversion linéarisée de profils de sismique marine en milieu stratifié élastique

Date de soutenance: 18 novembre 1997

Composition du jury:

Michel Campillo	Président	Professeur, Université de Grenoble
Michel Dietrich	Directeur de thèse	Chargé de recherche au CNRS, Grenoble
Dominique Fattaccioli	Examineur	Ingénieur, Thomson, Toulon
François Glangeaud	Examineur	Directeur de recherche au CNRS, Grenoble
Georges Pascal	Rapporteur	Professeur, Université de Versailles
Antonio Pica	Examineur	Ingénieur, Compagnie Générale de Géophysique, Massy
Jean Virieux	Rapporteur	Professeur, Université de Nice

10192547

Remerciements

Je remercie Michel Dietrich pour avoir accepté de diriger mes travaux et enseigné la rigueur dans le travail, tous les membres du jury, Michel Campillo, Dominique Fattaccioli, François Glangeaud, Georges Pascal, Antonio Pica, et Jean Virieux qui ont accepté de juger mon travail.

Je remercie la direction des constructions navales pour avoir accepté de financer ce travail de thèse et cela dans des conditions bien plus avantageuses que celles offertes par le pauvre ministère de la Recherche Française, qui oublie chaque année que tout augmente...

Je remercie toute l'équipe chaleureuse du CEPHAG (François Glangeaud, Marianne Nardin, Jean Michel Vampé, Stéphane Leroux), avec qui j'ai apprécié le travail.

Je remercie les personnes du LGIT qui à un moment ou à un autre savent nous faire décrocher du terminal, par leurs gateaux d'anniversaire, leurs blagues très fines, leurs fautes de français pour les amis étrangers, et la leçon de courage de mes amis algériens....

Je remercie toutes celles et tous ceux qui ont accepté de prendre de leur temps pour m'expliquer des points d'informatique et de géophysique, et sans qui cette thèse aurait duré bien plus longtemps.

Je remercie Michel Bouchon pour l'intérêt qu'il a porté sur mes travaux pendant ces trois années de thèse, et Catherine Pequegnat pour son efficace gestion du service informatique.

Je remercie ma famille, mes proches et Malika pour avoir supporté mes humeurs chaotiques, pendant la durée très très longue de mes études...

Sommaire

Remerciements.....	3
Sommaire.....	5
<i>Chapitre 1: Problématique</i>	11
I. Introduction	13
II. Sismique réflexion-Sismique réfraction	14
III. Non-linéarité du problème inverse	15
A. METHODES GLOBALES.....	15
B. METHODES DIRECTES D'INVERSION.....	15
C. LINEARISATION DU PROBLEME INVERSE: METHODE DIRECTE.....	17
IV. Méthodes itératives	18
A. PRESENTATION.....	18
B. ALGORITHME GENERAL.....	18
V. Evaluation de la sensibilité des champs d'ondes: position du problème	19
A. PERTURBATION DE L'EQUATION D'ONDE.....	19
B. LES RESULTATS DANS LE PLAN FREQUENCE-NOMBRE D'ONDE.....	20
VI. Inversion dans le domaine des ondes planes	21
VII. Inversion en domaine temps-distance: position du problème	22
A. UNE SOLUTION: REPRESENTATION PAR UN ENSEMBLE DE POINTS DIFFRACTANTS.....	22
B. UNE AUTRE SOLUTION: INTEGRATION DES DERIVEES DE FRECHET OBTENUES POUR DES ONDES PLANES EN MILIEU STRATIFIE.....	23
VIII. Objectifs	23

Chapitre 2: Propagation des ondes sismiques en milieu stratifié	27
I. Introduction	29
II. Ondes élastiques dans un milieu à stratification plane.....	30
A. REFLECTIVITE DU MILIEU DANS LE DOMAINE FREQUENCE-NOMBRE D'ONDE.....	30
1. Vecteur déplacement – contrainte	30
2. Vecteurs d'ondes	33
3. Matrices de réflexion et de transmission à une interface.....	35
a) Réflexion-transmission à une interface pour une onde se propageant vers le bas.....	36
b) Réflexion transmission à une interface pour une onde se propageant vers le haut.....	37
4. Matrices de réflexion transmission généralisées pour un milieu stratifié	38
5. Approche itérative pour un empilement de couches planes homogènes.....	40
6. Terme de force	40
7. Déplacements au niveau du récepteur	44
a) Source au dessus du récepteur	44
b) Source au dessous du récepteur	44
B. SYNTHESE DES MOUVEMENTS DANS LE DOMAINE TEMPS – DISTANCE.....	45
C. EXPRESSIONS DU DEPLACEMENT EN COORDONNEES CARTESIENNES.....	50
III. Une vérification du code: le théorème de réciprocité.....	51
IV. Particularités du programme.....	62
V. Visualisation de fronts d'ondes en milieu océanique.....	62
A. LE CUBE DES DONNEES $S(T,R,Z)$	62
B. EVOLUTION TEMPORELLE DES CHAMPS D'ONDES.....	63
VI. Conclusion	67

Chapitre 3: Sensibilité des champs d'ondes au premier ordre: calcul des dérivées de Fréchet des sismogrammes	69
I. Introduction	71
II. Détermination de l'opérateur des dérivées de Fréchet: position du problème.	72
III. Résolution.....	73
A. PROPAGATION DANS LE MILIEU NON -PERTURBE.....	73
B. DERIVEES DE FRECHET.....	74
IV. Calcul des sismogrammes synthétiques différentiels pour des sources ponctuelles dans un milieu stratifié plan.....	77
A. APPLICATION: ARTICLE SOUMIS A <i>B.S.S.A</i> , JUILLET 1997. COMPUTATION OF DIFFERENTIAL SEISMOGRAMS FOR POINT SOURCES IN LAYERED MEDIA	77
B. EXTENSIONS A DES FORCES HORIZONTALES.	110
C. EFFET D'UNE COUCHE MINCE.....	113
Chapitre 4: Formulation du problème inverse par le critère des moindres carrés	117
I. Présentation.....	119
II. Inversion Bayésienne	120

A. APPROCHE STOCHASTIQUE.....	120
B. PRECISIONS	121
C. DENSITE DE PROBABILITE A POSTERIORI	121
III. Evaluation des fonctions.....	123
A. FONCTION L(M).....	123
B. INFORMATION A PRIORI	123
IV. Méthode de résolution.....	125
A. DEFINITIONS.....	126
1. Gradient de la fonction coût:.....	126
2. Hessien de la fonction coût.....	126
B. METHODES DE MINIMISATION DE LA FONCTION COUT	126
1. Méthodes de Newton	127
2. Méthodes de gradient.....	128
C. METHODE DES GRADIENTS CONJUGUES.....	129
1. Algorithme.....	129
2. Recherche linéaire	129
3. Direction conjuguée	132
V. Choix des paramètres inversés et de la norme.....	134
A. CHOIX DES PARAMETRES D'INVERSION.....	134
B. LE PROBLEME DE LA NORME L^2	135
VI. Algorithme d'inversion: résumé.....	136
VII. Conclusions.....	138

Chapitre 5: Applications de la méthode d'inversion.....	139
I. Introduction.....	141
II. Précisions concernant les différentes études.....	142
III. Modèle à couches épaisses.....	143
A. DESCRIPTION DU MODELE.....	143
1. Modèle vrai.....	143
2. Modèle a priori.....	143
B. RESOLUTION	143
IV. Comparaison de deux résultats d'inversion.....	151
A. PRESENTATION.....	151
B. RESULTATS.....	151
V. Tests de robustesse de la méthode d'inversion.....	153
A. PRESENTATION.....	153
B. ETUDE DU CAS N°1	154
C. ETUDE DU CAS N° 2	160
D. ETUDE DU CAS N° 3.....	166
VI. Modèle à couches fines.....	173
A. DESCRIPTION DU MODELE.....	174
1. Modèle vrai.....	174
2. Modèle a priori.....	174
B. RESOLUTION	174
VII. Inversion de données réelles OBS de la campagne MALIS.....	184
A. PRESENTATION.....	184
B. TRAITEMENTS DES DONNEES	189
1. Filtrage et déconvolution.....	189

2. Corrections statiques	189
3. Résultats	190
VIII. Conclusions.....	199
 <i>Conclusions générales</i>	 201
 <i>Références</i>	 207
 <i>Annexes</i>	 215

Chapitre 1: Problématique

I. Introduction

Ce travail de thèse, financé par la Direction des Constructions Navales (D.C.E), s'inscrit dans le cadre de l'étude de la propagation des ondes acoustiques et sismiques dans les milieux marins. Le développement des techniques d'écoutes sous-marines amène à considérer les propagations de ces ondes dans une gamme de fréquences comprises entre 0 et 50 Hertz. L'influence du sous-sol marin, dans ce cas, ne peut plus être prise en compte comme un simple demi-espace homogène. Il résulte des couplages entre les ondes acoustiques et sismiques des phases sismiques réfléchies, réfractées et guidées par les interfaces du sous-sol qui compliquent notablement l'interprétation des champs d'ondes. L'un des problèmes consiste donc à développer des techniques de reconstruction des caractéristiques géologiques des premières centaines de mètres en profondeur pour pouvoir appliquer les techniques de simulations réalistes de la propagation acoustique et sismique incluant la géologie des fonds marins.

L'intérêt d'un tel travail doit permettre de caractériser plus précisément les milieux géophysiques marins en proposant non seulement d'imager le sous-sol d'un point de vue structural, mais aussi d'en évaluer ses propriétés mécaniques. Celles-ci se modélisent souvent comme des gradients en fonction de la profondeur représentée dans les méthodes par une succession de fines couches (plusieurs dizaines voire quelques centaines). Pour pouvoir tenir compte de cette très forte variabilité des propriétés élastiques selon la profondeur, les méthodes de simulation doivent être capables de traiter le contenu haute fréquence des signaux en des temps raisonnables. Le développement de méthodes permettant de prédire les variations fines des propriétés du milieu est de plus un enjeu pour les industries pétrolières et minières, et également pour les grands travaux géotechniques.

Ce travail de thèse consiste à adapter une méthode d'inversion des champs d'ondes complets permettant de reconstruire les propriétés d'un milieu marin à partir de données sismiques enregistrées par des capteurs en surface ou disposés au fond de la mer. Ces techniques ont été largement étudiées ces dernières années avec des domaines d'applications spécifiques à chacune d'entre elles. La suite de ce chapitre présente ces différentes méthodes,

et plus précisément en commençant par les méthodes classiques d'imagerie par sismique réflexion et réfraction.

II. Sismique réflexion-Sismique réfraction.

Ces techniques de traitement utilisent l'information contenue dans les temps d'arrivée et/ou les formes d'ondes des différents événements composant le signal. Celui-ci est généré par des sources sismiques impulsives et dépend de différents paramètres physiques tels que la densité, les coefficients d'élasticité (ou la vitesse des ondes), et de termes d'atténuation. Les méthodes de sismique-réfraction consistent à analyser les ondes qui se propagent latéralement le long de certaines interfaces pour estimer les vitesses de propagation. Ces techniques anciennes, largement exploitées en exploration géophysique, manquent de résolution pour reconnaître avec précision la nature des milieux étudiés.

Les méthodes de sismique-réflexion analysent les ondes qui se réfléchissent sur les interfaces géologiques du milieu et sont beaucoup plus performantes pour obtenir une image structurale du milieu. Le pouvoir de résolution latérale de ces méthodes peut encore être amélioré en utilisant des techniques de migration des champs d'ondes qui permettent de restituer les structures fortement hétérogènes. Une étape supplémentaire peut être franchie avec les techniques d'inversion des champs d'ondes complets qui permettent d'estimer non seulement les contrastes de réflectivité mais aussi les propriétés effectives du milieu. Ces méthodes d'inversion ont été largement développées au cours des quinze dernières années. Elles sont relativement sensibles à des problèmes numériques en présence de bruit ou lorsque le signal source est mal déconvolué. Ce sont ces techniques que nous présentons à présent.

III. Non-linéarité du problème inverse

Le problème inverse se résume à rechercher le modèle qui explique au mieux les données observées sur le terrain. Un élément quelconque de l'espace des modèles permet de calculer des sismogrammes synthétiques, et leurs écarts avec les sismogrammes réels que l'on appelle fonction coût. L'inversion consiste alors à minimiser ces écarts.

Le problème inverse de la sismologie est un problème non-linéaire. La résolution de ces problèmes est en général délicate. La conséquence directe est qu'il n'est pas possible en

partant d'un point quelconque de l'espace des modèles de converger systématiquement vers le minimum global de la fonction coût. A moins d'utiliser une méthode capable d'explorer la totalité de l'espace des modèles.

A. Méthodes globales

Les méthodes de Monte-Carlo permettent de rechercher le minimum absolu de la fonction coût en explorant de manière aléatoire l'espace des modèles. Des exemples d'inversion de données géophysiques par des techniques de Monte-Carlo ont été présentés par Press (1968). Ce type d'inversion n'est réaliste que pour un nombre limité de paramètres à inverser et une résolution grossière du modèle. Les applications à des données sismiques n'ont été abordées que plus récemment car ce type d'algorithme est très coûteux en temps de calcul. Sonder l'espace des modèles dans sa totalité reste hors de portée des ordinateurs actuels pour les problèmes multidimensionnels de sismique. Cary et Chapman (1988) ont inversé les temps de trajet et amplitudes de données sismiques pour reconstruire la loi de vitesse en fonction de la profondeur. Dans cette étude, l'espace des modèles est échantillonné non plus par une méthode de recherche aléatoire des modèles mais en appliquant la méthode décrite par Wiggins (1969, 1972). L'échantillonnage de l'espace des modèles tient compte de lois probabilistes définies à partir de sources d'information sur le modèle différentes de celles que l'on obtient à partir des données. Cette source d'information est une information *a priori* sur le modèle. Les méthodes les plus étudiées en sismique qui permettent d'obtenir les modèles de façon pseudo-aléatoire dérivent des méthodes de recuit simulé et généralisent l'algorithme Metropolis (méthode de recuits simulés, Metropolis, 1953) aux problèmes géophysiques. L'espace des modèles qui est sondé est traduit en terme de probabilité d'existence par analogie avec les résultats de mécanique statistique énoncés par Boltzmann. La probabilité est d'autant plus faible que le modèle s'écarte du modèle vrai. Marroquin (1987) propose de coupler cette information probabiliste avec l'approche du problème inverse exposée par Tarantola et Valette (1982), utilisant les règles de probabilités Bayésiennes. Cette approche consiste à combiner une information *a priori* sur le modèle et une information théorique reliant modèle et données pour obtenir une fonction densité de probabilité *a posteriori* sur l'espace des modèles (cf chapitre 4). L'information conjointe que l'auteur veut obtenir reste cependant difficile à définir car la méthode Bayésienne suppose une formulation explicite de la densité de

probabilité *a priori* ce qu'il ne parvient pas à faire. Plus récemment, Mosegaard et Tarantola (1995) ont résolu ce problème et proposent une application sur un exemple synthétique d'inversion de données gravimétriques. La solution du problème inverse est exprimée en terme de distribution multidimensionnelle, difficile à représenter et à interpréter. Néanmoins ces méthodes sont très intéressantes car elles s'adaptent de mieux en mieux aux méthodes inverses que nous allons considérer dans ce travail (inversion Bayésienne).

Dans la plupart des travaux effectués l'objectif principal est de valider ces techniques, car elles ne sont pas en l'état applicables à des problèmes de la taille de ceux que nous considérons en sismique marine.

B. Méthodes directes d'inversion

De nombreux travaux ont été menés afin d'aboutir à une résolution directe des paramètres à inverser. Ces méthodes cherchent à inverser l'application qui lie les paramètres physiques du milieu aux données sismiques, moyennant quelques approximations simplificatrices.

Les premiers travaux ont concerné les milieux acoustiques. En appliquant une transformation de Liouville à l'équation d'onde acoustique, on obtient une équation qui se relie à l'équation de Schrödinger (1-D) issue de la mécanique quantique (Ware & Aki, 1969). Cette transformation permet d'utiliser des résultats connus de la théorie quantique sur la diffraction. Ces problèmes de diffraction sont résolus par des méthodes d'équations intégrales (Gel'fand & Levitan, 1951; Marchenko, 1955). La réponse impulsionnelle du milieu permet de reconstruire le potentiel diffractant puis l'impédance acoustique en fonction du temps de trajet de l'onde. Cette méthode est applicable lorsque l'impédance est une fonction continue des variables d'espace. La limitation de cette procédure est la difficulté de sa résolution numérique.

En 1981, Newton a dérivé l'équation de l'élastodynamique pour obtenir une équation de Riccati. La résolution de cette équation est connue. Une transformation en équation intégrale permet de résoudre celle-ci par des méthodes itératives (Gjevik, Nilsen & Höyen, 1976). En 1986, Carazzone a présenté une résolution non itérative pour déterminer les paramètres élastiques à partir d'enregistrements trois composantes du mouvement généré par un point source ponctuel situé en surface. Cette méthode permet d'obtenir la variation de la densité, des vitesses des ondes P et S, pour un milieu tabulaire sans atténuation. La

transformation de l'équation de l'élastodynamique P-SV s'écrit sous forme d'une équation de Riccati matricielle dans le domaine fréquentiel. L'algorithme de résolution est très coûteux en temps de calcul et ne paraît pas très performant.

Aucune application réaliste utilisant les méthodes exactes n'a été réalisée jusqu'à ce jour. Tous les travaux supposent des données idéales, c'est à dire exemptes de bruit numérique et avec une connaissance parfaite du signal source. Ces méthodes mettent en jeu des traitements mathématiques élégants mais très complexes.

C. Linéarisation du problème inverse: méthode directe

Les méthodes d'analyse des signaux sismiques se propageant dans la terre peuvent être linéarisées. Dans notre cas, cela suppose qu'il n'existe que des phénomènes de diffraction simple, c'est à dire que toutes les réflexions multiples sont ignorées (ou qu'elles ont été atténuées dans une phase de pré-traitement des données), permettant ainsi d'obtenir une relation linéaire entre le champ mesuré et la perturbation par rapport au milieu de référence en appliquant l'approximation de Born (cf Morse & Feschbach, 1953). Mais cette supposition n'est pas toujours correcte. Lorsque les distances source-récepteurs sont importantes par rapport à la profondeur des objectifs, l'énergie du signal est piégée dans des guides d'ondes qui sont sources de non-linéarité des phénomènes de propagation. Néanmoins, pour les problèmes que nous considérons l'ouverture des dispositifs est suffisamment faible pour que cette hypothèse de linéarité du problème soit réaliste. Cohen et Bleistein (1979) et Bleistein et Cohen (1982) ont montré qu'il était alors possible, en travaillant dans le domaine spectral, d'apporter une alternative à la résolution directe du problème inverse basée sur l'équation de Gel'fand Levitan (1951).

Même linéarisées, ces méthodes sont inapplicables à des données réelles, et ne peuvent rivaliser avec les résultats obtenus par les méthodes d'inversion itératives linéarisées que nous appliquons dans le cadre de cette thèse. Ces dernières sont plus complètes et les performances des ordinateurs actuels permettent de les appliquer à des données réelles.

IV. Méthodes itératives

A. Présentation

Ces méthodes supposent qu'une faible perturbation du milieu crée des effets que l'on sait mesurer. Leur analyse permet de définir un nouveau modèle qui réduit les écarts entre les sismogrammes calculés à partir de ce nouveau modèle et les sismogrammes réels. En supposant la linéarité du processus au voisinage du modèle perturbé on se ramène « localement » à un problème classique de minimisation de fonction, largement traité par Franklin (1970) dans le cas linéaire.

Ce formalisme a été largement développé par Tarantola et Valette (1982) et a été adapté aux problèmes de sismique multi-traces. Il permet de minimiser la fonction coût par une technique de moindres carrés généralisés résolue par une méthode de gradient. Le principe de ces méthodes suppose de pouvoir définir pour chaque itération une direction de descente vers le minimum de la fonction coût, ainsi qu'un pas de descente le long de cette direction.

Wood et Lindwall (1986) ont comparé le potentiel de ces méthodes avec les méthodes semi globales de recuit simulé. Sur un exemple d'inversion de données réelles, la méthode de minimisation par la technique de moindres carrés généralisés a donné des résultats tout à fait comparables à ceux obtenus par une méthode de recuit simulé. Cette conclusion suppose tout de même un bon modèle de départ pour l'inversion dans le cas de la première méthode. Il soulignent aussi le coût de calcul encore trop excessif des méthodes de recuit simulé.

B. Algorithme général

La mise en oeuvre d'une telle méthode d'inversion nécessite les trois ingrédients suivants:

- Un programme de simulation numérique permettant de calculer les sismogrammes synthétiques d à partir d'un modèle m pour la géométrie considérée (ici des milieux à stratification plane). Ce calcul permet de mesurer la valeur de la fonction coût pour le modèle considéré.

- Un programme de calcul des opérateurs de sensibilité des champs d'ondes par rapport aux paramètres du modèle. En effet, si l'on est capable de décrire les opérateurs de sensibilité des champs d'ondes, alors inversement on peut définir les opérateurs adjoints qui permettent de déduire les modifications à apporter au modèle pour réduire les écarts avec les sismogrammes que l'on inverse.

- Un algorithme d'inversion proprement dit qui réalise la minimisation de la fonction coût par une méthode de gradient utilisant les opérateurs de sensibilité calculés au cours de l'étape précédente.

L'intérêt porté à ce sujet durant les dernières années se traduit par un nombre important de publications qui auront permis d'acquérir un savoir faire indispensable pour l'inversion des données réelles. Les premiers succès ont été établis pour des milieux acoustiques 1-D (Lines et Treitel, 1984, Chapman et Orcutt, 1985), puis 2-D (Gaultier *et al* 1986). Le cas élastique a été traité de nombreuses fois depuis. Nous pouvons nous référer, par exemple, aux travaux de Mora (1987), Kormendi (1989), Jurado (1992), Assous (1989), Gouveia (1996) et Djikpessé (1996).

V. Evaluation de la sensibilité des champs d'ondes: position du problème

A. Perturbation de l'équation d'onde

La technique de minimisation consiste à définir la direction de descente à partir du calcul du gradient de la fonction coût à l'itération courante. Ce calcul fait intervenir la matrice des dérivées de Fréchet des données par rapport aux paramètres du modèle, autour du modèle courant. L'élément (i,j) de cette matrice représente la sensibilité (au premier ordre) du j ième élément des données par rapport au i ème paramètre du modèle. Cette sensibilité du champ d'onde peut toujours s'évaluer par une méthode purement numérique en calculant la différence entre le champ d'onde obtenu pour le modèle de référence à l'itération courante, et le champ

d'onde obtenu pour le modèle perturbé. Ce cas de figure suppose un nombre important de calculs directs à résoudre car il faut calculer en plus du sismogramme correspondant au modèle de référence, autant de sismogrammes qu'il y a de paramètres à inverser. Une telle résolution est très pénalisante en temps de calcul.

Une solution plus adaptée consiste à exprimer analytiquement la matrice des dérivées de Fréchet. Une telle résolution suppose de pouvoir exprimer la solution d'une perturbation au premier ordre de l'équation d'onde. Tarantola (1984, eq. 4.8) donne les expressions analytiques de ces dérivées pour des perturbations ponctuelles du modèle (cf chapitre 3). Les dérivées de Fréchet peuvent s'évaluer par des méthodes de différences finies et n'impliquent plus que la résolution d'un seul problème direct (Ikelle *et al.*, 1986, Gaultier *et al.* 1986, Crase *et al.* 1990, Debski et Tarantola, 1995, Igel *et al.*, 1993). Cette formulation est intéressante mais elle suppose une perturbation ponctuelle des paramètres. Les milieux que nous étudions sont tabulaires, la matrice des dérivées de Fréchet doit être exprimée par rapport à la perturbation d'une couche d'extension infinie et non d'un point.

B. Les résultats dans le plan fréquence-nombre d'onde

Dietrich et Kormendi (1990) ont obtenu une formulation analytique des dérivées de Fréchet dans le plan fréquence-nombre d'onde. Cette formulation étend au domaine élastique les résultats obtenus par Pan *et al.* (1988) dans le cas acoustique. Leurs expressions sont des combinaisons des dérivées spatiales et de la dérivée temporelle des tenseurs de Green du milieu stratifié calculés dans le domaine des ondes planes. Cette formulation est particulièrement intéressante car les calculs sont très rapides et la formulation est directement applicable dans un schéma d'inversion de données sismiques dans ce domaine (Kormendi et Dietrich, 1991).

L'une des approches les plus efficaces pour évaluer le tenseur de Green consiste à appliquer les techniques de réflectivité développées par exemple par Thomson Haskell (1953), Fuchs et Müller (1971) ou, comme nous le ferons, Kennett et Kerry (1979). Ces méthodes permettent d'obtenir les réponses sismiques exactes des milieux stratifiés, incluant toutes les réflexions primaires et multiples, toutes les conversions d'ondes de compression en ondes de cisaillement, toutes les ondes d'interface et de surface, ainsi que les effets de champ proche.

VI. Inversion dans le domaine des ondes planes

La décomposition des signaux sismiques réels en ondes planes a largement été étudiée durant les trente dernières années. En effet, une telle décomposition permet encore d'utiliser les techniques classiques d'analyse du signal sur les sections transformées (déconvolution, filtrage, migration ou inversion) mais surtout, elle rend leurs analyses plus simples que dans le domaine original temps-distance, qui est le domaine naturel d'acquisition des données. La transformation linéaire qui opère cette décomposition est une transformation de Radon. Son utilisation sur des sections sismiques a donné lieu à de nombreuses publications et notamment celles de Dietrich (1990) où l'auteur insiste en particulier sur la décomposition en ondes planes de données sismiques obtenues avec des sources axisymétriques. La prise en compte de ces caractéristiques préserve convenablement les amplitudes et les phases des formes d'ondes et a permis d'élaborer une technique d'inversion du champ d'onde complet dans le domaine des ondes planes (Kormendi et Dietrich, 1991).

Cette méthode utilise les techniques évoquées dans le paragraphe précédent pour calculer la réflectivité du milieu (Kennett et Kerry, 1979) ainsi que les dérivées de Fréchet analytiques exprimées dans le domaine fréquence-paramètre de rai (Dietrich et Kormendi, 1990). Elle est très rapide car l'inversion est réalisée pour chaque onde plane en minimisant dans le domaine spectral les écarts entre sismogramme réel et sismogramme synthétique. Elle évite notamment l'intégration en nombres d'ondes qui est très coûteuse en temps de calcul.

Ces techniques d'inversion sont adaptées à des dispositifs d'acquisition de très grande ouverture avec un échantillonnage spatial très dense. Elles supposent aussi que l'approximation de milieu 1-D soit justifiée sur des distances très grandes, ce qui limite son domaine d'application. Pour des dispositifs de longueur limitée, la décomposition en ondes planes introduit des artefacts sur les sections transformées (Dietrich, 1990, II.3). Les distorsions du signal sont d'autant plus importantes que le dispositif d'acquisition est plus court, ce qui peut s'avérer catastrophique pour l'inversion des formes d'ondes.

VII. Inversion en domaine temps-distance: position du problème

Pour éviter ces inconvénients, mais en renonçant aussi à une certaine rapidité de calcul, nous choisirons de revenir au domaine temps-distance et de mettre en oeuvre une méthode d'inversion dans ce domaine. Il faut dans ce cas être capable de calculer le gradient de la fonction coût et donc l'opérateur de sensibilité au premier ordre dans le domaine temps-distance. Cet opérateur doit représenter l'effet d'une perturbation d'une couche d'extension infinie pour pouvoir être facilement intégré dans le schéma d'inversion proposé par Kormendi et Dietrich(1991). La recherche de la solution peut être abordée de deux manières différentes.

A. Une solution: représentation par un ensemble de points diffractants

La formulation de Tarantola (1984) fournit les expressions analytiques des dérivées de Fréchet pour une perturbation ponctuelle des propriétés du milieu. Ces expressions sont des combinaisons complexes des dérivées spatiales et temporelle des tenseurs de Green calculés dans le milieu non perturbé. L'application de cette formulation comporte les étapes suivantes:

Calcul des dérivées spatiales et temporelle du tenseur de Green:

Les expressions des dérivées de Fréchet de Tarantola (1984) ont été développées de manière tout à fait générale pour n'importe quel système de coordonnées curvilignes. La solution la plus simple consiste cependant à mettre en oeuvre ces expressions dans un système de coordonnées cartésiennes, ce qui évite l'application des formules de changement de repère.

Le calcul des fonctions de Green pour les ondes P, SV et SH générées par des sources ponctuelles dans un milieu stratifié s'effectue naturellement dans un système de coordonnées cylindriques, bien qu'une formulation en coordonnées cartésienne ait également été proposée (Bouchon, 1980).

Nous avons choisi de résoudre tout le problème d'inversion dans un système de coordonnées cartésiennes, en projetant les fonctions de Green obtenues en

coordonnées cylindriques sur le repère cartésien, et en calculant les dérivées spatiales et temporelle des fonctions de Green dans ce même repère.

Calcul des dérivées de Fréchet pour une perturbation ponctuelle: cette étape se résoud en appliquant la formulation de Tarantola à partir des expressions analytiques décrites précédemment.

Sommation des effets d'une répartition de points diffractants: en appliquant le théorème de représentation, il est possible de représenter la perturbation au premier ordre des paramètres d'une couche en la discrétisant et en sommant les contributions des points diffractants.

Cette méthode permet de calculer les effets d'une structure de dimension finie dans un milieu tabulaire.

B. Une autre solution: intégration des dérivées de Fréchet obtenues pour des ondes planes en milieu stratifié.

La formulation des dérivées de Fréchet proposée par Dietrich et Kormendi (1990) pour des milieux stratifiés a été exprimée dans le plan fréquence-paramètre de rai et peut être facilement transformée dans le domaine fréquence-nombre d'onde. Le passage au domaine temps-distance de ces formules nécessite non seulement des transformations de Hankel (par rapport aux nombres d'ondes) et de Fourier (par rapport aux fréquences), mais aussi une intégration spatiale dans le plan horizontal qui peut être évaluée analytiquement.

VIII.Objectifs

Toute la problématique discutée précédemment permet d'organiser ce mémoire de thèse selon les thèmes suivants:

Chapitre 2: Propagation des ondes sismiques en milieu stratifié.

Ce chapitre présente la méthode de résolution analytique du problème direct pour calculer la réponse sismique des milieux tabulaires, c'est-à-dire les composantes du tenseur de Green exprimées dans un repère cartésien et convoluées par la signature temporelle de la

source. Nous testerons les résultats du programme de modélisation en utilisant le théorème de réciprocité des tenseurs de Green (Aki et Richards, 1980).

Chapitre 3: Sensibilité des champs d'ondes au premier ordre: calcul des dérivées de Fréchet des sismogrammes

Ce chapitre présente les deux techniques évoquées précédemment pour construire la matrice des dérivées de Fréchet. La première méthode consiste à calculer les effets de diffraction au premier ordre générés par un ensemble de points diffractants répartis sur une surface d'extension finie. Nous discuterons les problèmes de discrétisation et d'extension spatiale de cette surface pour simuler les effets d'une couche plane d'extension. Cette discussion permettra de comparer nos résultats à la notion de zone de Fresnel d'un réflecteur. La deuxième méthode est une nouvelle technique. Nous validerons cette méthode par une application à un cas réaliste de modèle multicouche à gradient de vitesse.

Chapitre 4: Formulation du problème inverse par le critère des moindres carrés:

Ce chapitre présente l'approche stochastique du problème inverse qui se résume à expliquer les données par le modèle le plus probable. Nous n'exposerons que les résultats importants qui permettront de mieux comprendre comment définir conjointement une source d'information *a priori* sur le modèle recherché avec une source d'information reliée à notre connaissance théorique des liens entre les données et le modèle. Nous verrons que cette approche revient à trouver le maximum d'une fonction densité de probabilité. Cette fonction sera supposée Gaussienne et finalement le problème se résume à trouver le minimum d'une fonction coût que nous caractériserons mathématiquement. Cette minimisation sera réalisée par une technique de gradients conjugués que nous présenterons.

Chapitre 5: Applications aux données

La méthode est illustrée par des exemples d'inversion de données synthétiques réalistes, et des enregistrements réels. Pour étudier la robustesse de la méthode, une série de tests a permis de mieux comprendre l'influence de certaines erreurs imposées soit aux données synthétiques, soit au milieu d'étude. Ces erreurs sont de trois types:

- 1) mauvaise connaissance du signal source
- 2) décalages temporels aléatoires des signaux (erreurs statiques)
- 3) pendage général du milieu stratifié

La méthode permet de considérer différentes géométries source-récepteurs et s'applique notamment à des enregistrements de type OBS ou des enregistrements de profils sismiques verticaux à condition de respecter les hypothèses de faibles non-linéarité, c'est-à-dire en évitant principalement les angles d'incidence trop élevés sur les interfaces du milieu. L'application à des données réelles qui est présentée, souligne si cela est encore nécessaire l'importance du modèle de départ, la nécessité de pouvoir évaluer correctement l'ondelette pour effectuer le processus d'inversion.

Chapitre 2: Propagation des ondes sismiques en milieu stratifié

I. Introduction

La résolution du problème direct constitue une étape importante de la solution des problèmes inverses par des méthodes de gradient. Virieux (1986) propose une méthode de différences finies assez générale pour prendre en compte la propagation des ondes P-SV pour des milieux hétérogènes. Cette liberté dans le choix des modèles doit permettre des études qui concernent des milieux tout à fait réalistes. Cette méthode est utilisée dans des schémas d'inversion car c'est encore aujourd'hui l'unique moyen pour retrouver des structures 2-D. Mais les temps de calculs sont très longs.

L'une des approches les plus efficaces du problème de simulation numérique pour les milieux 1-D consiste à combiner la technique de réflectivité développée par Kennett & Kerry (1979) avec la méthode d'intégration en nombres d'ondes discrets proposée par Bouchon (1981). Cette combinaison a notamment été utilisée par Yao & Harkrider (1983), et par Dietrich (1988). En appliquant cette technique les calculs des champs d'ondes au niveau des récepteurs sont complets, ils contiennent les réflexions primaires et multiples, les conversions d'ondes, et les ondes d'interface, ils sont aussi bien plus rapide que les méthodes de différences finies.

La méthode de Kennett & Kerry (1979) consiste à raisonner en termes de potentiels (ou d'amplitudes) des ondes montantes et descendantes à l'intérieur des couches homogènes composant le milieu stratifié, et à construire de manière explicite, pour un ensemble d'ondes planes, les coefficients de réflexion et de transmission généralisés pour des empilements de couches homogènes. Cette approche fournit des résultats dont la précision numérique est excellente, y compris aux fréquences les plus élevées. Dans ce chapitre¹ nous rappelons ici les équations principales entre potentiels, déplacements et contraintes permettant d'assurer la cohérence des expressions de calcul. Ensuite nous ferons des tests de réciprocité des solutions

¹ Ce chapitre est partiellement rédigé à partir de documents appartenants à Michel Dietrich.

calculées pour valider le code de calcul. Celui-ci sera illustré par une technique de visualisation des fronts dans un milieu marin.

II. Ondes élastiques dans un milieu à stratification plane

A. Réflectivité du milieu dans le domaine fréquence-nombre d'onde

1. Vecteur déplacement – contrainte

La propagation des ondes dans un milieu stratifié est solution de l'équation des ondes, avec des conditions aux limites aux interfaces et des conditions de radiation à l'infini.

On considère ici une source sismique ponctuelle dans un milieu stratifié élastique isotrope à couches planes et horizontales. Le milieu stratifié surmonte un demi-espace élastique homogène et isotrope. Les déplacements et les contraintes seront calculés dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dont la composante radiale de la source est toujours nulle. L'axe z de ce repère est dirigé positivement vers le bas.

Le passage d'un système de coordonnées cartésiennes à un système de coordonnées cylindriques complique notablement l'écriture des gradients du déplacement et du tenseur des contraintes. L'introduction de nouvelles variables de déplacement (u_v, u_H) , de contrainte (τ_{Vz}, τ_{Hz}) , et de force volumique (f_v, f_H) (Hudson, 1969)

$$\begin{aligned} u_v &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta \right] & u_H &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} u_r \right] \\ \tau_{Vz} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta z} \right] & \tau_{Hz} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{\theta z}) - \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{rz} \right] \\ f_v &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r f_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} f_\theta \right] & f_H &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r f_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} f_r \right] \end{aligned} \quad (2.1)$$

permet néanmoins de récrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme de 6 équations différentielles aux dérivées partielles qui se séparent en 2 groupes: 4 équations couplées pour la propagation des ondes P et SV (polarisées dans le plan de propagation), et 2

équations couplées pour la propagation des ondes SH (polarisées dans le plan perpendiculaire au plan de propagation).

De plus, l'invariance du milieu dans la direction horizontale permet de s'affranchir des gradients horizontaux et des dérivées temporelles en appliquant aux équations obtenues une série de transformations intégrales définie par

$$\tilde{\Psi}(k, m, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \int_0^{\infty} dr r J_m(kr) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{-im\theta} \Psi(r, \theta, t) \quad (2.2)$$

Ces opérations consistent en une transformation de Fourier par rapport au temps t , suivie d'une transformation de Hankel d'ordre m par rapport à la distance radiale r , et d'une transformation de Fourier par rapport à l'angle θ . Le résultat de ces transformations est une décomposition en ondes cylindriques des champs d'ondes dans l'espace des fréquences angulaires ω et des nombres d'ondes k . On verra plus loin que la synthèse des fronts d'ondes dans le domaine temps - distance impliquera les transformations inverses, c'est à dire trois intégrales (ou leur représentation discrète) par rapport aux variables k, m et ω . Pour l'instant, l'application des intégrales (2.2) à nos deux systèmes d'équations permet de réduire ceux-ci à deux systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre par rapport à la profondeur z , que l'on peut écrire sous la forme matricielle générale

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}(k, m, z, \omega) = \mathbf{A}(k, z, \omega) \mathbf{b}(k, m, z, \omega) + \mathbf{F}(k, m, z, \omega) \quad (2.3)$$

Plus précisément, si on définit pour chaque ordre azimutal m les variables

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \tilde{u}_z & \mathbf{P} &= \tilde{\tau}_{zz} & \mathbf{F}_z &= \rho \tilde{f}_z \\ \mathbf{V} &= -\tilde{u}_v/k & \mathbf{S} &= -\tilde{\tau}_{Vz}/k & \mathbf{F}_v &= -\rho \tilde{f}_v/k \\ \mathbf{W} &= -\tilde{u}_H/k & \mathbf{T} &= -\tilde{\tau}_{Hz}/k & \mathbf{F}_H &= -\rho \tilde{f}_H/k \end{aligned} \quad (2.4)$$

qui sont reliées aux transformées des variables de déplacement, de contrainte et de force volumique, alors les vecteurs \mathbf{b} , \mathbf{F} et la matrice \mathbf{A} auront les significations suivantes :

- pour les ondes P et SV

$$\mathbf{b}_{PSV}(k, m, z, \omega) = [U, V, P, S]^T \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{F}_{PSV}(k, m, z, \omega) = [0, 0, F_z, F_v]^T$$

$$\mathbf{A}_{PSV}(k, z, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & k(1 - 2\beta^2/\alpha^2) & 1/\rho\alpha^2 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 1/\rho\beta^2 \\ -\rho\omega^2 & 0 & 0 & k \\ 0 & \rho(\eta k^2 - \omega^2) & -k(1 - 2\beta^2/\alpha^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5b)$$

- pour les ondes *SH*

$$\mathbf{b}_{SH}(k, m, z, \omega) = [W, T]^T \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{F}_{SH}(k, m, z, \omega) = [0, F_H]^T$$

$$\mathbf{A}_{SH}(k, z, \omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1/\rho\beta^2 \\ \rho(k^2\beta^2 - \omega^2) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6b)$$

Dans ces expressions, $\rho = \rho(z)$, $\alpha = \alpha(z)$ et $\beta = \beta(z)$ désignent respectivement la densité et les vitesses des ondes de compression et de cisaillement à la profondeur z . Le facteur η est égal à $\eta = 4\beta^2(1 - \beta^2/\alpha^2)$. La normalisation par rapport au nombre d'onde k dans les relations (2.4) a été introduite pour "homogénéiser" les dimensions des variables U, V, W d'une part, et P, S, T d'autre part. Les étapes ci-dessus sont décrites en détail dans Kennett (1983, pp. 23-30), mais les matrices \mathbf{A} (et tous les développements ultérieurs) sont exprimées en fonction du paramètre de ray p .

Les vecteurs \mathbf{b}_{PSV} et \mathbf{b}_{SH} comportent des composantes qui sont reliées pour moitié aux déplacements et pour moitié aux contraintes. Ces vecteurs déplacement - contrainte jouent un rôle essentiel dans les méthodes classiques de propagateurs matriciels (Thomson, 1950; Haskell, 1953). En effet, les conditions aux limites à respecter à l'interface entre deux couches élastiques soudées sont la continuité du déplacement $\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z$ et de la contrainte $\mathbf{t}(r, \theta, z, t) = \tau_{rz} \mathbf{e}_r + \tau_{\theta z} \mathbf{e}_\theta + \tau_{zz} \mathbf{e}_z$ s'exerçant sur la facette de normale Oz . A la surface libre, la condition à respecter est l'annulation de la contrainte \mathbf{t} . Ces conditions se retrouvent entièrement au niveau des variables de déplacement U, V, W , et de contrainte P, S, T , car u_r, u_θ, τ_{rz} et $\tau_{\theta z}$ ne

dépendent que des dérivées horizontales, et les transformations intégrales (2) préservent la continuité de ces variables. Les conditions aux limites à l'intérieur du milieu stratifié se traduisent par conséquent, par la continuité du vecteur déplacement-contrainte $\mathbf{b}(k, m, z, \omega)$ de part et d'autre des interfaces.

2. Vecteurs d'ondes

A l'intérieur d'une couche homogène, les champs d'ondes peuvent être décomposés sans ambiguïté en contributions d'ondes *P* et *S* montantes et descendantes. On peut relier dans ce cas les vecteurs déplacement - contrainte \mathbf{b} à des vecteurs d'onde \mathbf{v} contenant les potentiels des ondes *P* (φ_U, φ_D), *SV* (ψ_U, ψ_D) et *SH* (χ_U, χ_D), montantes (indice U - *up*) et descendantes (indice D - *down*), en écrivant

$$\mathbf{b} = \mathbf{D} \mathbf{v} \quad (2.7)$$

et en distinguant les deux systèmes de propagation *P-SV* et *SH* identifiés plus haut, c'est à dire

$$\mathbf{v}_{PSV} = [\varphi_U, \psi_U, \varphi_D, \psi_D]^T ; \quad \mathbf{v}_{SH} = [\chi_U, \chi_D]^T$$

En l'absence de source, la substitution de l'équation (2.7) dans l'équation différentielle matricielle (2.3) conduit à une nouvelle équation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \left[\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D} - \mathbf{D}^{-1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} \right] \mathbf{v} \quad (2.8)$$

qui suggère que si \mathbf{D} est la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres de la matrice \mathbf{A} , alors

$$\mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{D} = i\Lambda \quad (2.9)$$

est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} . Cette dernière forme permet d'intégrer facilement l'équation différentielle (2.8) en milieu homogène, car dans ce cas les coefficients de la matrice \mathbf{A} sont constants, et par conséquent, ceux de la matrice \mathbf{D} le sont également. L'équation (2.8) s'écrit alors simplement

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = i\Lambda \mathbf{v}$$

et admet pour solution

$$\mathbf{v}(z) = \exp[i(z - z_0)\Lambda] \mathbf{v}(z_0) \quad (2.10)$$

La résolution des polynômes caractéristiques des matrices Λ_{PSV} et Λ_{SH} donne respectivement :

$$\Lambda_{PSV} = \text{diag}(-\nu, -\gamma, \nu, \gamma) \quad \text{et} \quad \Lambda_{SH} = \text{diag}(-\gamma, \gamma), \quad (2.11)$$

$$\text{où} \quad \nu = \sqrt{\omega^2/\alpha^2 - k^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\omega^2/\beta^2 - k^2} \quad (2.12)$$

représentent les nombres d'ondes verticaux des ondes P et S (SV , SH) dans la couche homogène considérée. La solution (2.10) s'écrit par conséquent

$$\mathbf{v}(z) = \mathbf{Q}(z, z_0) \mathbf{v}(z_0) \quad (2.13)$$

c'est à dire,

$$\mathbf{v}_{PSV}(z) = \text{diag}[e^{-i\nu(z-z_0)}, e^{-i\gamma(z-z_0)}, e^{i\nu(z-z_0)}, e^{i\gamma(z-z_0)}] \mathbf{v}_{PSV}(z_0) \quad (2.14)$$

pour la propagation $P-SV$, et

$$\mathbf{v}_{SH}(z) = \text{diag}[e^{-i\gamma(z-z_0)}, e^{i\gamma(z-z_0)}] \mathbf{v}_{SH}(z_0) \quad (2.15)$$

pour la propagation SH .

La matrice $\mathbf{Q}(z, z_0)$ est le propagateur du vecteur d'onde \mathbf{v} . De manière analogue, l'équation différentielle originale (2.3) s'intègre en

$$\mathbf{b}(z) = \exp[(z - z_0)\mathbf{A}] \mathbf{b}(z_0) \quad \text{en l'absence de source, c'est à dire}$$

$$\mathbf{b}(z) = \mathbf{P}(z, z_0) \mathbf{b}(z_0) \quad \text{où} \quad \mathbf{P}(z, z_0) = \exp[(z - z_0)\mathbf{A}]$$

est le propagateur de Thomson-Haskell.

3. Matrices de réflexion et de transmission à une interface

L'égalité (2.7) définit clairement le rôle de la matrice \mathbf{D} comme un opérateur de transformation des potentiels d'ondes montantes et descendantes en déplacements et contraintes. En décomposant les vecteurs d'onde de la façon évoquée dans le paragraphe précédent, on présente la matrice \mathbf{D} sous la forme partitionnée

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_U & \mathbf{M}_D \\ \mathbf{N}_U & \mathbf{N}_D \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

où \mathbf{M}_U et \mathbf{M}_D transforment respectivement les ondes montantes et descendantes \mathbf{v}_U et \mathbf{v}_D en déplacements et \mathbf{N}_U et \mathbf{N}_D transforment respectivement les ondes montantes et descendantes \mathbf{v}_U et \mathbf{v}_D en contraintes, avec:

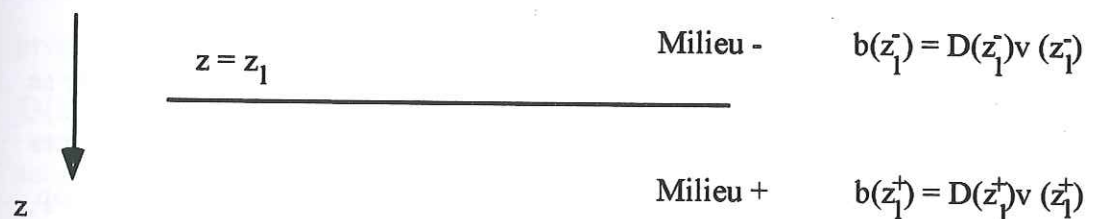
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_U \\ \mathbf{v}_D \end{pmatrix}$$

en distinguant les deux systèmes de propagation $P-SV$ et SH les partitions \mathbf{v}_U et \mathbf{v}_D compte tenu des notations précédentes s'écrivent:

$$\mathbf{v}_u = \begin{pmatrix} \varphi_u \\ \psi_u \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_d = \begin{pmatrix} \varphi_d \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad P-SV$$

$$\mathbf{v}_u = (\chi_u) \mathbf{v}_d = (\chi_d) SH$$

A une interface plane



(les indices négatifs désignent que l'on est dans le milieu-, les positifs que l'on est dans le milieu+)

la continuité des déplacements et des contraintes à l'interface implique que

$$\mathbf{b}(z_1^-) = \mathbf{b}(z_1^+) \quad (2.17)$$

ce qui entraîne

$$v_-(z_1^-) = \mathbf{D}_-^{-1}(z_1^-) \mathbf{D}_+(z_1^+) v_+(z_1^+) \quad (2.18a)$$

ou encore

$$v_-(z_1^-) = \mathbf{Q}(z_1^-, z_1^+) v_+(z_1^+) \quad (2.18b)$$

avec

$$\mathbf{Q}(z_1^-, z_1^+) = \mathbf{D}_-^{-1}(z_1^-) \mathbf{D}_+(z_1^+) \quad (2.19)$$

Une inversion par blocs de la matrice \mathbf{D} fournit \mathbf{D}^{-1} . La matrice \mathbf{Q} peut donc s'écrire sous la forme partitionnée

$$\begin{pmatrix} v_{U-} \\ v_{D-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{UU} & \mathbf{Q}_{UD} \\ \mathbf{Q}_{DU} & \mathbf{Q}_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{U+} \\ v_{D+} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

c'est à dire

$$\begin{cases} v_{U-}(z_1^-) = \mathbf{Q}_{UU} v_{U+}(z_1^+) + \mathbf{Q}_{UD} v_{D+}(z_1^+) \\ v_{D-}(z_1^-) = \mathbf{Q}_{DU} v_{U+}(z_1^+) + \mathbf{Q}_{DD} v_{D+}(z_1^+) \end{cases} \quad (2.21)$$

Dans le plan de propagation (P - SV), \mathbf{Q} est une matrice (4,4). Dans le plan perpendiculaire (SH) \mathbf{Q} est une matrice (2,2) cf. équations (2.14, 2.15). Les partitions de la matrice \mathbf{Q} sont donc respectivement de dimension (2,2) pour le système P - SV et scalaires pour les ondes SH .

a) Réflexion-transmission à une interface pour une onde se propageant vers le bas

Pour une onde incidente se propageant vers le bas dans le milieu « - », on écrit:

$$\begin{cases} v_{U-}(z_1^-) = \mathbf{R}_D v_{D-}(z_1^-) \\ v_{D+}(z_1^+) = \mathbf{T}_D v_{D-}(z_1^-) \end{cases} \quad (2.22)$$

où \mathbf{R}_D et \mathbf{T}_D sont les matrices de réflexion et de transmission à l'interface $z = z_1$ pour une onde se propageant vers le bas. \mathbf{R}_D et \mathbf{T}_D sont des matrices (2,2) dans le cas P - SV . Ces matrices contiennent les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface $z = z_1$ pour les ondes PP, SP, PS et SS:

$$\mathbf{R}_D = \begin{pmatrix} r_D^{PP} & r_D^{SP} \\ r_D^{PS} & r_D^{SS} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_D = \begin{pmatrix} t_D^{PP} & t_D^{SP} \\ t_D^{PS} & t_D^{SS} \end{pmatrix}$$

Dans le cas SH , les matrices \mathbf{R}_D et \mathbf{T}_D se réduisent à des quantités scalaires qui représentent les coefficients de réflexion et de transmission des ondes SH à l'interface $z = z_1$. En utilisant les relations (2.21) et (2.22) et en supposant qu'il n'y a pas d'ondes montantes dans le milieu « + » ($v_{U+}(z_1^+) = 0$) on déduit facilement les expressions des matrices \mathbf{R}_D et \mathbf{T}_D à l'aide des partitions \mathbf{Q}_{UD} et \mathbf{Q}_{DD} décrites ci-avant:

$$\mathbf{R}_D = \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \quad \mathbf{T}_D = \mathbf{Q}_{DD}^{-1}$$

b) Réflexion transmission à une interface pour une onde se propageant vers le haut

Par raison de symétrie avec ce qui précède, on a:

$$\begin{cases} v_{D+}(z_1^+) = \mathbf{R}_U v_{U+}(z_1^+) \\ v_{U-}(z_1^-) = \mathbf{T}_U v_{U+}(z_1^+) \end{cases} \quad (2.23)$$

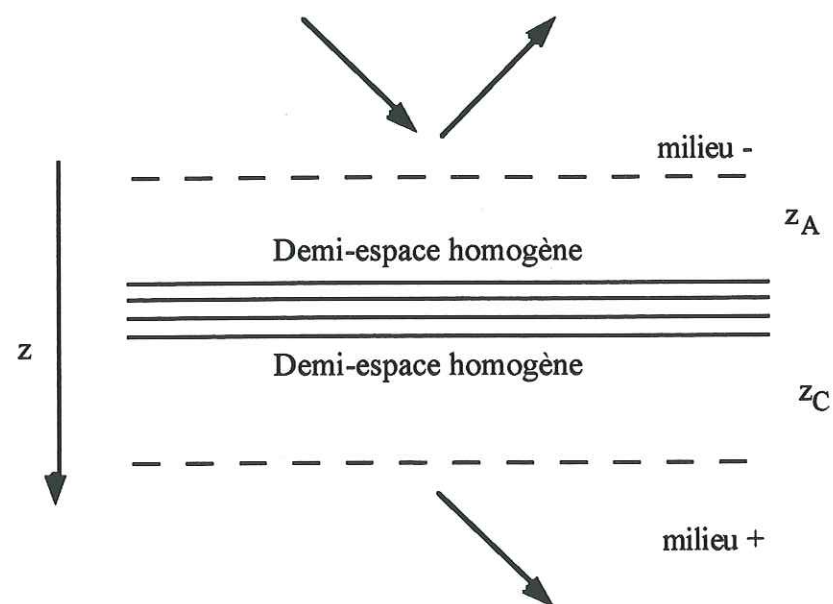
où \mathbf{R}_U et \mathbf{T}_U sont de même nature que les matrices \mathbf{R}_D et \mathbf{T}_D discutées précédemment. En utilisant les relations (2.21) et (2.23) et l'absence d'ondes descendantes dans le milieu « - » ($v_{U-}(z_1^-) = 0$), on exprime ces matrices à l'aide des partitions \mathbf{Q}_{UU} , \mathbf{Q}_{UD} , \mathbf{Q}_{DU} , et \mathbf{Q}_{DD} décrites ci-avant:

$$\mathbf{R}_D = -\mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU} \quad \mathbf{T}_D = \mathbf{Q}_{UU} - \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU}$$

De cette façon, connaissant la matrice \mathbf{A} de l'équation différentielle (2.3), et ses vecteurs propres qui forment la matrice \mathbf{D} , il devient possible de déterminer la matrice $\mathbf{Q}(z_1^-, z_1^+) = \mathbf{D}_-^{-1}(z_1^-) \mathbf{D}_+(z_1^+)$ et ses quatre partitions \mathbf{Q}_{UU} , \mathbf{Q}_{UD} , \mathbf{Q}_{DU} , et \mathbf{Q}_{DD} . La connaissance de ces sous-matrices permet à son tour de calculer les quatre matrices de réflexion-transmission $\mathbf{R}_U, \mathbf{R}_D, \mathbf{T}_U, \mathbf{T}_D$ au niveau d'une interface plane.

4. Matrices de réflexion transmission généralisées pour un milieu stratifié

Connaissant les expressions des matrices de réflexion-transmission pour une interface, on cherche maintenant les expressions des matrices de réflexion-transmission généralisées pour un milieu stratifié compris entre deux demi-espaces homogènes (voir le schéma ci-après).



Le propagateur de Thomson-Haskell permet de relier les vecteurs déplacements-contraintes exprimés en deux profondeurs z_A et z_C à l'intérieur des demi-espaces homogènes. En appliquant la décomposition en vecteurs d'ondes (2.7) on écrit:

$$\mathbf{b}(z_A) = \mathbf{P}(z_A, z_C) \mathbf{b}(z_C) \quad \text{et} \quad \mathbf{b}(z_C) = \mathbf{D}(z_C) \mathbf{v}(z_{C+}) \quad (2.24)$$

Le vecteur d'onde en A dans le milieu « - » se relie alors facilement au vecteur d'onde en C dans le milieu « + » en combinant les trois équations précédentes

$$\mathbf{v}(z_{A-}) = \mathbf{D}^{-1}(z_A) \mathbf{P}(z_A, z_C) \mathbf{D}(z_C) \mathbf{v}(z_{C+}) \quad (2.25)$$

En procédant d'une façon tout à fait analogue à ce que nous avons précédemment écrit, on définit un propagateur d'onde \mathbf{Q} de la façon suivante:

$$\mathbf{Q}(z_A, z_C) = \mathbf{D}^{-1}(z_A) \mathbf{P}(z_A, z_C) \mathbf{D}(z_C) \quad (2.26)$$

Par conséquent, en partitionnant la matrice \mathbf{Q} de manière similaire à l'équation (2.20), on peut écrire:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_U(z_{A-}) \\ \mathbf{v}_D(z_{A-}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{UU} & \mathbf{Q}_{UD} \\ \mathbf{Q}_{DU} & \mathbf{Q}_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_U(z_{C+}) \\ \mathbf{v}_D(z_{C+}) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

et compte tenu de l'étude précédente, les matrices de réflexion-transmission pour la couche épaisse considérée s'écrivent formellement

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_D^{AC} &= \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} & \mathbf{T}_D^{AC} &= \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \\ \mathbf{R}_U^{AC} &= -\mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU} & \mathbf{T}_U^{AC} &= \mathbf{Q}_{UU} - \mathbf{Q}_{UD} \mathbf{Q}_{DD}^{-1} \mathbf{Q}_{DU} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ces coefficients diffèrent des précédents par l'équation (2.26) dans laquelle le propagateur \mathbf{P} tient compte de la propagation dans le milieu stratifié entre z_A et z_C . Ainsi, si la zone comprise entre les profondeurs $z = z_A$ et $z = z_C$ est un milieu homogène,

$$\mathbf{P}(z_A, z_C) = \exp[(z_A - z_C) \mathbf{A}]$$

D'autre part, si l'épaisseur de cette zone est nulle ($z_A = z_C$), alors $\mathbf{P}(z_A, z_C) = \mathbf{I}$, ce qui entraîne que les coefficients de réflexion-transmission généralisés se réduisent aux coefficients de réflexion-transmission à l'interface $z = z_A = z_C$

Inversement, le propagateur d'onde \mathbf{Q} pour une couche délimitée par deux interfaces z_A et z_C est la matrice partitionnée qui en termes de réflexions et de transmissions a la signification suivante:

$$\mathbf{Q}(z_A, z_C) = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_U^{AC} - \mathbf{R}_D^{AC} (\mathbf{T}_D^{AC})^{-1} \mathbf{R}_U^{AC} & \mathbf{R}_D^{AC} (\mathbf{T}_D^{AC})^{-1} \\ -(\mathbf{T}_D^{AC})^{-1} \mathbf{R}_U^{AC} & (\mathbf{T}_D^{AC})^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

5. Approche itérative pour un empilement de couches planes homogènes

Si on insère dans le milieu stratifié borné par les interfaces A et C une interface intermédiaire B (cf schéma précédent). On peut définir deux propagateurs $Q(z_A, z_B)$ et $Q(z_B, z_C)$ tels que:

$$v(z_A) = Q(z_A, z_B)v(z_B) \text{ et } v(z_B) = Q(z_B, z_C)v(z_C)$$

ce qui permet d'écrire le propagateur entre A et C:

$$Q(z_A, z_C) = Q(z_A, z_B) Q(z_B, z_C) \quad (2.30)$$

En d'autres termes, le propagateur d'onde pour un assemblage de milieux stratifiés s'obtient par le produit matriciel des propagateurs de chacun des deux milieux. Il se compose de quatre partitions que l'on exprime à l'aide des matrices de réflexion et de transmission pour les deux milieux AB et BC. L'expression des matrices de réflexion-transmission pour le milieu composite AC se déduit des formules (2.28) appliquées aux deux propagateurs $Q(z_A, z_B)$ et $Q(z_B, z_C)$ de manière à respecter la loi de composition (2.30) pour le propagateur $Q(z_A, z_B)$. On trouve ainsi:

$$\begin{aligned} T_D^{AC} &= T_D^{BC} [I - R_U^{AB} R_D^{BC}]^{-1} T_D^{AB} \\ R_D^{AC} &= R_D^{AB} + T_U^{AB} R_D^{BC} [I - R_U^{AB} R_D^{BC}]^{-1} T_D^{AB} \\ T_U^{AC} &= T_U^{AB} [I - R_D^{BC} R_U^{AB}]^{-1} T_U^{BC} \\ R_U^{AC} &= R_U^{BC} + T_D^{BC} R_U^{AB} [I - R_D^{BC} R_U^{AB}]^{-1} T_U^{BC} \end{aligned} \quad (2.31)$$

La généralisation à un modèle composé de n couches s'obtient en procédant par itérations successives.

6. Terme de force

Kennett (1983) introduit la contribution de la source d'ordre azimuthal m comme une discontinuité du vecteur déplacement-contrainte au niveau de la position de la source dans le domaine fréquence-nombre d'onde ω -k: $S(k, m, z_s, \omega) = b(k, m, z_s, \omega) - b(k, m, z_{s+}, \omega)$.

La représentation la plus générale d'une source ponctuelle est une combinaison d'une force ponctuelle orientée et d'un tenseur des moments: $f_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} M_{ij} \delta(\mathbf{x}) + F_i \delta(\mathbf{x})$ $i, j = 1, 2, 3$.

Les sources sismiques dont il est question ici sont des forces orientées et des sources explosives. Une force orientée correspond à $F_i \neq 0$ et $M_{ij} = 0$. Une explosion correspond à un tenseur des moments isotrope: $M_{ij} = M_0 \delta_{ij}$, où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker.

La représentation en vecteurs déplacement-contrainte des forces orientées dans les trois directions de l'espace (F_x, F_y, F_z) et d'une explosion (P) s'écrivent (Kennett, 1983, eq.4.59; 4.60):

$$S_{F_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_z \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_{F_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F_x/2 \end{pmatrix} \quad S_{F_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ iF_y/2 \end{pmatrix} \quad S_P = \begin{pmatrix} M_0/\rho\alpha^2 \\ 0 \\ 0 \\ 2k\beta^2 M_0/\alpha^2 \end{pmatrix}$$

dans le plan de propagation P - S_v et

$$S_{F_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad S_{F_x} = \begin{pmatrix} 0 \\ iF_x/2 \end{pmatrix} \quad S_{F_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_y/2 \end{pmatrix} \quad S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dans le plan de propagation S_H .

Pour des raisons de symétrie propres aux coordonnées cylindriques, les forces radiales et tangentielles correspondent à un ordre azimuthal $m=1$ tandis que la force verticale et l'explosion correspondent à un ordre azimuthal $m=0$ (cf Kennett, 1983, chapitre 4)

A cette discontinuité du vecteur déplacement-contrainte correspond une discontinuité du vecteur d'onde:

$$\Sigma(k, m, z_s, \omega) = v(k, m, z_{s+}, \omega) - v(k, m, z_{s-}, \omega) = D^{-1} S(k, m, z_s, \omega) \quad (2.32)$$

D est la matrice des vecteurs propres obtenue pour les valeurs propres de A dans la couche contenant la source. Elle est composée des partitions M_U, M_D, N_U, N_D définies précédemment. Leurs expressions sont données par Kennett (1983, p51). Compte tenu des expressions de la matrice A (2.5b, 2.6b), les partitions s'écrivent dans le domaine fréquence-nombre d'onde:

$$\mathbf{M}_U = \begin{pmatrix} -a & k \\ k & -b \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}_U = \begin{pmatrix} \rho(2\beta^2 k^2 - \omega^2) & -2\rho\beta^2 kb \\ -2\rho\beta^2 ka & \rho(2\beta^2 k^2 - \omega^2) \end{pmatrix} \quad \text{avec } a = iv \text{ et } b = iy$$

$$\mathbf{M}_D = \begin{pmatrix} a & k \\ k & b \end{pmatrix} \quad \mathbf{N}_D = \begin{pmatrix} \rho(2\beta^2 k^2 - \omega^2) & 2\rho\beta^2 kb \\ 2\rho\beta^2 ka & \rho(2\beta^2 k^2 - \omega^2) \end{pmatrix}$$

pour les ondes P-SV et

$$\mathbf{M}_U = \frac{-ib}{\beta} \mathbf{N}_U = -i\rho\beta b$$

pour les ondes SV

$$\mathbf{M}_D = \frac{-ib}{\beta} \mathbf{N}_D = i\rho\beta b$$

L'expression de \mathbf{D}^{-1} se déduit de \mathbf{D} et s'exprime à l'aide des partitions ci-avant (Kennett, 1983, eq. 2.63)

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{M}_U, \mathbf{M}_D \rangle^{-T} \mathbf{N}_D^T & -\langle \mathbf{M}_U, \mathbf{M}_D \rangle^{-T} \mathbf{N}_D^T \\ -\langle \mathbf{M}_U, \mathbf{M}_D \rangle^{-1} \mathbf{N}_D^T & \langle \mathbf{M}_U, \mathbf{M}_D \rangle^{-1} \mathbf{N}_D^T \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

$$\text{avec } \langle \mathbf{M}_U, \mathbf{M}_D \rangle = \mathbf{M}_U^T \mathbf{N}_D - \mathbf{N}_U^T \mathbf{M}_D \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{M}_U, \mathbf{M}_D \rangle^T = -\langle \mathbf{M}_D, \mathbf{M}_U \rangle$$

c'est à dire

$$\mathbf{D}_{P-SV}^{-1} = \frac{1}{2\rho\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{\rho}{a}\theta & 2\rho\beta^2 k & -1 & -\frac{k}{a} \\ 2\rho\beta^2 k & \frac{\rho}{b}\theta & -\frac{k}{b} & -1 \\ -\frac{\rho}{a}\theta & 2\rho\beta^2 k & -1 & \frac{k}{a} \\ 2\rho\beta^2 k & -\frac{\rho}{b}\theta & \frac{k}{b} & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \theta = 2\beta^2 k^2 - \omega^2 \quad (2.34a)$$

Pour le cas S_H , le calcul est plus immédiat puisque les partitions de la matrice \mathbf{D} sont des scalaires. On obtient dans ce cas:

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\rho\beta^2}{2} & -\frac{1}{2b} \\ \frac{\rho\beta^2}{2} & \frac{1}{2b} \end{pmatrix} \quad (2.34b)$$

En multipliant cette matrice par les discontinuité générées par les sources considérées, on crée une discontinuité des vecteurs d'ondes sous forme de potentiels montants et descendant.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_U \\ \Sigma_D \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Ainsi pour une explosion (ordre azimutal $m=0$), les potentiels radiés sont

$$\phi_U = -\phi_D = -\frac{M_0}{2\rho\alpha^2 a}$$

$$\psi_U = \psi_D = 0 \quad (2.36a)$$

$$\chi_U = \chi_D = 0$$

Pour une force verticale (ordre azimutal $m=0$), les potentiels sont

$$\phi_U = -\phi_D = -\frac{F_z}{2\rho\omega^2}$$

$$\psi_U = -\psi_D = \frac{F_z}{2\rho\omega^2} \frac{k}{b} \quad (2.36b)$$

$$\chi_U = \chi_D = 0$$

Pour une force radiale (ordre azimutal $m=1$), les potentiels sont

$$\phi_U = -\phi_D = -\frac{kF_x}{4\rho\omega^2}$$

$$\psi_U = -\psi_D = \frac{F_x}{4\rho\omega^2} \quad (2.36c)$$

$$\chi_U = -\chi_D = -i\frac{F_x}{4b}$$

pour une force tangentielle (ordre azimutal $m=1$) les potentiels sont

$$\phi_U = -\phi_D = -i\frac{kF_y}{4\rho\omega^2}$$

$$\psi_U = +\psi_D = -i\frac{F_y}{4\rho\omega^2} \quad (2.36d)$$

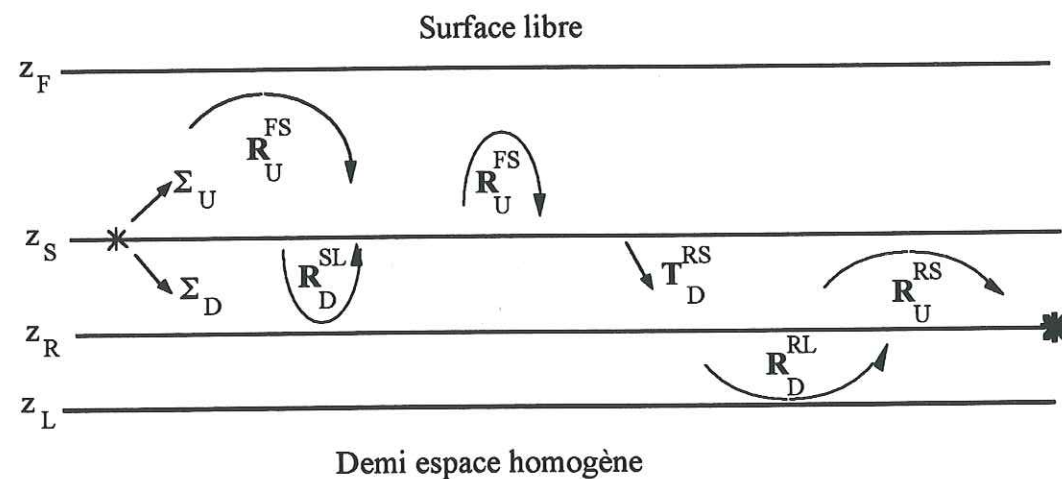
$$\chi_U = -\chi_D = -\frac{F_y}{4b}$$

7. Déplacements au niveau du récepteur

Compte tenue des résultats précédent Kennett (1983) propose une expression tout à fait originale du vecteur déplacement en l'exprimant dans le domaine fréquence-nombre d'onde par rapport aux matrices généralisées. R_U^{RS} , R_D^{RL} , R_U^{FS} , R_D^{SL} , R_U^{RS} , R_U^{FR} , T_D^{RS} et T_U^{RS} les indices R, S, F, L désignent respectivement les positions du récepteur, de la source, de la surface libre et du demi-espace. Pour calculer le vecteur déplacement on distingue les deux cas suivants:

a) Source au dessus du récepteur

Pour cette situation on peut schématiser la propagation de la source au récepteur de la façon suivante:



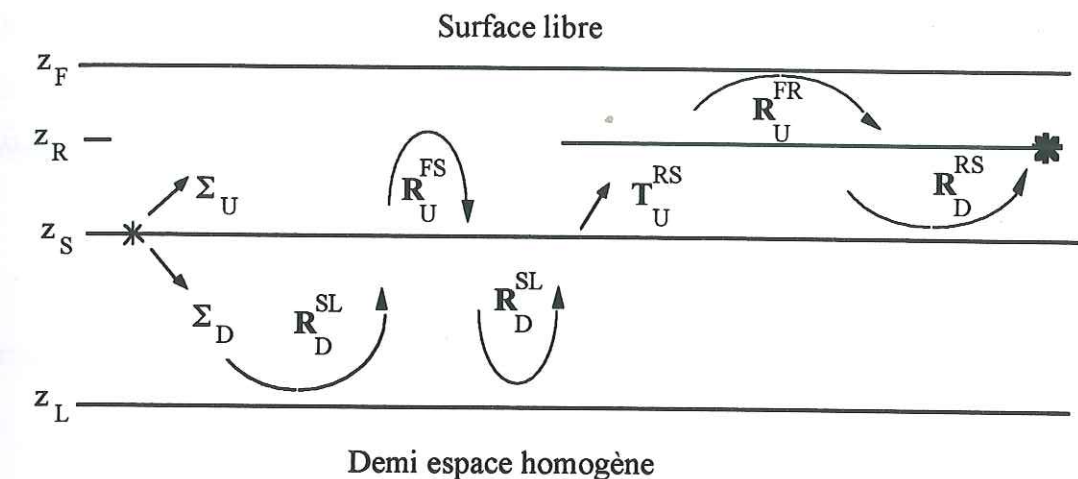
ce qui s'écrit en terme de déplacement au niveau du récepteur:

$$w(z_R) = (M_D^R + M_U^R R_D^{RL}) [I - R_U^{RS} R_D^{RL}]^{-1} T_D^{RS} [I - R_U^{FS} R_D^{SL}]^{-1} (\Sigma_D - R_U^{FS} \Sigma_U)$$

Cette formule se lit du dernier au premier terme, en distinguant le terme concernant la radiation de la source sismique, la fonction de transfert du milieu, et un opérateur matriciel convertissant les potentiels en déplacements.

b) Source au dessous du récepteur

Pour cette situation on représente



Le déplacement correspondant au niveau du récepteur est obtenu comme précédemment soit:

$$w(z_R) = (M_U^R + M_D^R R_U^{FR}) [I - R_D^{RS} R_U^{FR}]^{-1} T_U^{RS} [I - R_D^{SL} R_U^{FS}]^{-1} (R_D^{SL} \Sigma_D - \Sigma_U) \quad (2.38)$$

L'application de ce formalisme permet de calculer la réponse en ondes planes des sources sismiques, en terme de déplacement pour chaque fréquence angulaire ω et chaque nombre d'onde k (ou paramètre de ray p). La dernière étape consiste à sommer toutes les contributions pour synthétiser les fronts d'ondes complexes.

Cette étape d'intégration de la réponse en ondes planes peut être réalisée de différentes façons, notamment à l'aide de la méthode des nombres d'ondes discrets (Bouchon & Aki, 1977; Bouchon, 1980, 1981).

B. Synthèse des mouvements dans le domaine temps - distance

Les mouvements sismiques dans le domaine temps-distance sont obtenus à partir de la réponse en ondes planes calculée dans le domaine fréquence-nombre d'onde pour un type donné de source sismique. Le déplacement s'écrit sous forme vectorielle à l'aide d'une intégrale double sur les fréquences angulaires ω et sur les nombres d'ondes k , et d'une somme discrète sur les ordres azimutaux m caractérisant la source d'excitation du milieu :

$$\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \times \sum_m \left[U(m, z, \omega, k) \mathbf{R}_k^m(r, \theta) + V(m, z, \omega, k) \mathbf{S}_k^m(r, \theta) + W(m, z, \omega, k) \mathbf{T}_k^m(r, \theta) \right] \quad (2.39)$$

Les harmoniques vectorielles \mathbf{R}_k^m , \mathbf{S}_k^m et \mathbf{T}_k^m sont définies par (Takeuchi & Saito, 1971)

$$\mathbf{R}_k^m(r, \theta) = \mathbf{e}_z Y_k^m(r, \theta) ; \quad \mathbf{S}_k^m(r, \theta) = \frac{1}{k} \nabla_H Y_k^m(r, \theta) ; \quad \mathbf{T}_k^m(r, \theta) = -\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{S}_k^m(r, \theta) \quad (2.40)$$

avec $Y_k^m(r, \theta) = J_m(kr) e^{im\theta}$ et $\nabla_H = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ (gradient horizontal).

$J_m(\xi)$ représente la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m .

On en déduit les expressions explicites générales des composantes u_r , u_θ et u_z du déplacement en coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \sum_m \left[V(m, z, \omega, k) \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} + W(m, z, \omega, k) \frac{im}{kr} J_m(kr) \right] e^{im\theta} \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \sum_m \left[V(m, z, \omega, k) \frac{im}{kr} J_m(kr) - W(m, z, \omega, k) \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} \right] e^{im\theta} \\ u_z(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \sum_m U(m, z, \omega, k) J_m(kr) e^{im\theta} \end{aligned} \quad (2.41a)$$

Ces expressions montrent un couplage des mouvements horizontaux V et W en champ proche, pour les ordres azimutaux $m \neq 0$.

Le champ de pression s'obtient de manière identique à la composante verticale du déplacement :

$$p(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \sum_m P(m, z, \omega, k) J_m(kr) e^{im\theta} \quad (2.41b)$$

Les seules valeurs de m à considérer pour des sources ponctuelles (forces, dipôles, couples) sont $m = 0, \pm 1, \pm 2$. On se limitera ici aux déplacements engendrés par une source

explosive, et par des forces orientées dans les trois directions d'espace dans un repère cartésien. Ces sources ne dépendent que des ordres azimutaux $m = 0, \pm 1$. Les sources correspondant à $m = \pm 2$, essentielles en sismologie, sont décrites dans l'article de Kennett & Kerry (1979).

Les relations ci-dessus peuvent être simplifiées en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel de première espèce d'ordre m . De la formule de récurrence

$$J_{m+1}(\xi) + J_{m-1}(\xi) = \frac{2mJ_m(\xi)}{\xi}$$

on déduit

$$J_{-m}(\xi) = \begin{cases} J_m(\xi) & m \text{ entier pair} \\ -J_m(\xi) & m \text{ entier impair} \end{cases}$$

par ailleurs, les dérivées des fonctions de Bessel s'écrivent

$$\frac{dJ_m(\xi)}{d\xi} = J_{m-1}(\xi) - m \frac{J_m(\xi)}{\xi} = m \frac{J_m(\xi)}{\xi} - J_{m+1}(\xi) \quad (2.42)$$

par conséquent,

$$\frac{dJ_0(kr)}{d(kr)} = -J_1(kr) ; \quad \frac{dJ_1(kr)}{d(kr)} = -\frac{dJ_{-1}(kr)}{d(kr)} = J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} \quad (2.43)$$

On obtient ainsi:

- pour l'ordre azimutal $m = 0$ (explosion E , force verticale F_z)

$$\begin{aligned} u_r^{E,Fz}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ -V^{E,Fz}(z, \omega, k) J_1(kr) \right\} \\ u_\theta^{E,Fz}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ W^{E,Fz}(z, \omega, k) J_1(kr) \right\} = 0 \\ u_z^{E,Fz}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ U^{E,Fz}(z, \omega, k) J_0(kr) \right\} \end{aligned} \quad (2.44a)$$

et

$$p^{E,Fz}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ P^{E,Fz}(z, \omega, k) J_0(kr) \right\}. \quad (2.44b)$$

- pour les ordres azimutaux $m = \pm 1$ (force horizontale F_x ou F_y)

Si on représente les contributions $m = -1$ et $m = +1$ des forces F_x et F_y par les exposants F_{x-} , F_{x+} , F_{y-} et F_{y+} respectivement, les potentiels de source vérifient

$$\begin{aligned} \varphi_U^{F_{x+}} &= -\varphi_U^{F_{x-}} & \psi_U^{F_{x+}} &= -\psi_U^{F_{x-}} & \chi_U^{F_{x+}} &= \chi_U^{F_{x-}} \\ \varphi_D^{F_{x+}} &= -\varphi_D^{F_{x-}} & \psi_D^{F_{x+}} &= -\psi_D^{F_{x-}} & \chi_D^{F_{x+}} &= \chi_D^{F_{x-}} \end{aligned} \quad \text{pour une force suivant } x, \quad (2.45a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_U^{F_{y+}} &= \varphi_U^{F_{y-}} & \psi_U^{F_{y+}} &= \psi_U^{F_{y-}} & \chi_U^{F_{y+}} &= -\chi_U^{F_{y-}} \\ \varphi_D^{F_{y+}} &= \varphi_D^{F_{y-}} & \psi_D^{F_{y+}} &= \psi_D^{F_{y-}} & \chi_D^{F_{y+}} &= -\chi_D^{F_{y-}} \end{aligned} \quad \text{pour une force suivant } y. \quad (2.45b)$$

On en déduit les propriétés de symétrie suivantes pour les déplacements U , V et W

$$U^{F_{x-}} = -U^{F_{x+}} \quad V^{F_{x-}} = -V^{F_{x+}} \quad W^{F_{x-}} = W^{F_{x+}} \quad \text{pour une force suivant } x, \quad (2.46a)$$

$$U^{F_{y-}} = U^{F_{y+}} \quad V^{F_{y-}} = V^{F_{y+}} \quad W^{F_{y-}} = -W^{F_{y+}} \quad \text{pour une force suivant } y, \quad (2.46b)$$

ce qui permet d'écrire les déplacements $u^{F_{x,y}}$ uniquement à l'aide des contributions F_{x+} et F_{y+} .

En remplaçant la dépendance azimutale $e^{im\theta}$, $m = \pm 1$ par $\sin\theta$ et $\cos\theta$, en introduisant la fonction,

$$J_{inc}(\xi) = \frac{J_1(\xi)}{\xi}; \quad J_{inc}(0) = \frac{1}{2},$$

et le déplacement horizontal $H(z, \omega, k) = V(z, \omega, k) - iW(z, \omega, k)$, on trouve

$$\begin{aligned} u_r^{F_x}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2[V^{F_{x+}}(z, \omega, k) J_0(kr) - H^{F_{x+}}(z, \omega, k) J_{inc}(kr)] \cos\theta \right\} \\ u_\theta^{F_x}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2i[-W^{F_{x+}} J_0(kr) + iH^{F_{x+}}(z, \omega, k) J_{inc}(kr)] \sin\theta \right\} \end{aligned} \quad (2.47a)$$

$$u_z^{F_x}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2U^{F_{x+}} J_1(kr) \cos\theta \right\}$$

et

$$p^{F_x}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2P^{F_{x+}} J_1(kr) \cos\theta \right\} \quad (2.47b)$$

pour une force suivant x ,

$$\begin{aligned} u_r^{F_y}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2i[V^{F_{y+}}(z, \omega, k) J_0(kr) - H^{F_{y+}}(z, \omega, k) J_{inc}(kr)] \sin\theta \right\} \\ u_\theta^{F_y}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2[-W^{F_{y+}} J_0(kr) + iH^{F_{y+}}(z, \omega, k) J_{inc}(kr)] \cos\theta \right\} \end{aligned} \quad (2.48a)$$

$$u_z^{F_y}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2i U^{F_{y+}} J_1(kr) \sin\theta \right\}$$

et

$$p^{F_y}(r, \theta, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2i P^{F_{y+}} J_1(kr) \sin\theta \right\} \quad (2.48b)$$

pour une force suivant y .

Les contributions des termes en $J_{inc}(kr)$ ne sont significatives que pour les faibles valeurs de l'argument $kr = 2\pi \sin j \frac{r}{\lambda}$, c'est à dire lorsque les angles d'incidence j sont petits, ou que les distances radiales de propagation r sont petites par rapport à la longueur d'onde λ du signal. La figure II.1 ci-dessous présente les fonctions $J_0(\xi)$, $J_1(\xi)$ et $J_{inc}(\xi)$. On notera la décroissance rapide de la fonction $J_{inc}(\xi)$ par rapport aux deux autres fonctions de Bessel de part et d'autre de l'origine.

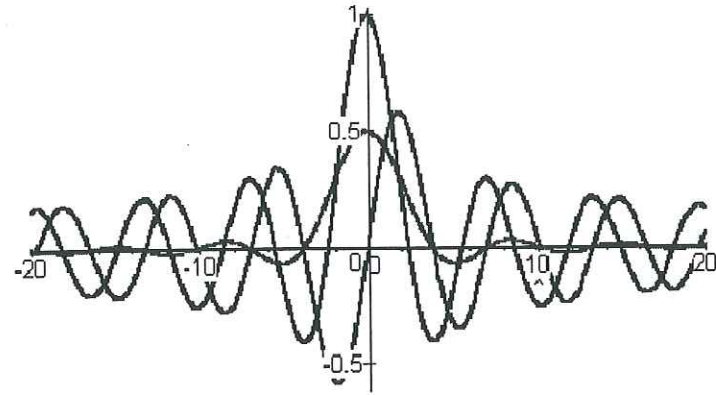


Figure II.1 : Représentation graphique des fonctions $J_0(\xi)$, $J_1(\xi)$ et $Jinc(\xi)$. J_0 passe par le point (0,1), J_1 par le point (0,0) et $Jinc$ par le point (0,0.5).

C. Expressions du déplacement en coordonnées cartésiennes

Il est quelquefois utile d'exprimer les déplacements en coordonnées cartésiennes, en partant de la réponse obtenue dans un système de coordonnées cylindriques. Cette approche est en général plus rapide en temps de calcul que celle qui consiste à calculer directement les mouvements en coordonnées cartésiennes par une double intégration dans le plan (k_x, k_y) (Bouchon, 1979). Le champ de pression et la composante z du déplacement restent inchangés dans ce changement de repère. Les composantes du déplacement suivant les axes Ox et Oy s'écrivent au moyen des formules classiques de rotation

$$\begin{aligned} u_x(r, \theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t) \cos \theta - u_\theta(r, \theta, z, t) \sin \theta \\ u_y(r, \theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t) \sin \theta + u_\theta(r, \theta, z, t) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.49)$$

En développant ces formules, les noyaux des intégrales s'écrivent (en omettant les arguments des déplacements) :

- pour une force suivant x

$$\begin{aligned} \{u_x^{Fx}(r, \theta, z, t)\} &= \left\{ 2 \left[\cos^2 \theta V^{Fx*} + i \sin^2 \theta W^{Fx*} \right] J_0(kr) - \cos 2\theta H^{Fx*} Jinc(kr) \right\} \\ \{u_y^{Fx}(r, \theta, z, t)\} &= \left\{ \sin 2\theta H^{Fx*} \left[J_0(kr) - 2 Jinc(kr) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.50a)$$

- pour une force suivant y

$$\begin{aligned} \{u_x^{Fy}(r, \theta, z, t)\} &= \left\{ i \sin 2\theta H^{Fy*} \left[J_0(kr) - 2 Jinc(kr) \right] \right\} \\ \{u_y^{Fy}(r, \theta, z, t)\} &= \left\{ 2 \left[i \sin^2 \theta V^{Fy*} - \cos^2 \theta W^{Fy*} \right] J_0(kr) + 2i \cos 2\theta H^{Fy*} Jinc(kr) \right\} \end{aligned} \quad (2.50b)$$

- pour une force suivant z et pour une explosion (pour lesquelles $W = 0$)

$$\begin{aligned} \{u_x^{E,Fz}(r, \theta, z, t)\} &= \left\{ -V^{E,Fz} \cos \theta J_1(kr) \right\} \\ \{u_y^{E,Fz}(r, \theta, z, t)\} &= \left\{ -V^{E,Fz} \sin \theta J_1(kr) \right\} \end{aligned} \quad (2.50c)$$

III. Une vérification du code: le théorème de réciprocité

Une façon de contrôler si les sismogrammes calculés sont correctement calculés consiste à vérifier le théorème de réciprocité du tenseur de Green (voir par exemple Aki & Richards, 1980, pp25-29). Les déplacements au point \mathbf{x}_r mesurés au temps t , et générés par des forces ponctuelles situées au point \mathbf{x}_s agissant au temps t_0 , se représentent sous la forme d'un tenseur de Green. Les éléments de ce tenseur s'écrivent selon la notation suivante: $G_{ij}^i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s, t_0)$

Les indices i, j varient de 1 à 3 suivant les trois directions du repère choisi.

La propriété de réciprocité de ce tenseur est telle que l'on doit vérifier l'égalité suivante:

$$G_{ij}^i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s, t_0) = G_{ji}^j(\mathbf{x}_s, t; \mathbf{x}_r, t_0)$$

c'est à dire qu'un déplacement dans la direction i mesuré en \mathbf{x}_r et au temps t pour une force ponctuelle dans la direction j située au point \mathbf{x}_s , agissant au temps t_0 , doit être égal au déplacement mesuré dans la direction j au point \mathbf{x}_s (toujours au temps t) pour une force ponctuelle dans la direction i située au point \mathbf{x}_r (agissant toujours au temps t_0). C'est ce que nous allons vérifier maintenant. Pour cela, nous nous sommes placés dans le cas le plus général, où source et récepteurs se trouvent dans des couches distinctes, et avec une géométrie permettant d'exciter à la fois les ondes P , SV et SH

On considère 4 types de sources ponctuelles, une explosion (Ex) et trois forces orientées dans les trois directions de l'espace: deux forces horizontales suivant x et y (Fx et

F_y), et une force verticale suivant z (F_z). On considère 4 types de champs d'ondes, la pression (P_r) les déplacements horizontaux suivant x et y (D_x et D_y), et le déplacement suivant z (D_z). On teste les 16 combinaisons source-récepteurs possibles en « retournant » la géométrie source-récepteurs: il y a 32 profils à calculer en 8 passages du programme, 4 lorsque la source est en dessus des récepteurs et 4 lorsque la source est en dessous des récepteurs. Chaque passage du programme fournit 4 champs d'ondes pour une source donnée.

Le modèle est composé d'une couche plane de 500 mètres d'épaisseur pour laquelle la vitesse de propagation des ondes P est de 4000 m/s, la vitesse de propagation des ondes S est de 2000 m/s, et la masse volumique vaut 2 g/cm^3 . Cette couche repose sur un demi-espace pour lequel la vitesse des ondes P vaut 4500 m/s celle des ondes S vaut 2500 m/s, la masse volumique vaut $2,5 \text{ g/cm}^3$. On suppose que l'atténuation est négligeable ($Q_p = Q_s = 10000$). La première géométrie considérée est telle que la source est à l'abscisse nulle et à une profondeur de 1 kilomètre, alors que les récepteurs sont au nombre de 51, régulièrement placés de l'abscisse nulle à une abscisse de 2 kilomètres, Leurs positions sur l'axe des ordonnées sont égales à 500 mètres, ils sont à une profondeur constante de 5 mètres. La deuxième géométrie, obtenue en retournant la précédente, est telle que les 51 récepteurs sont maintenant à une profondeur de 1 kilomètre régulièrement espacés de -2 kilomètres jusqu'à l'origine du repère. Leurs positions sur l'axe des ordonnées est de -500 mètres. La source est maintenant à 5 mètres de profondeur toujours à l'origine du repère. Cette géométrie source-récepteurs est représentée sur la figure II.2.

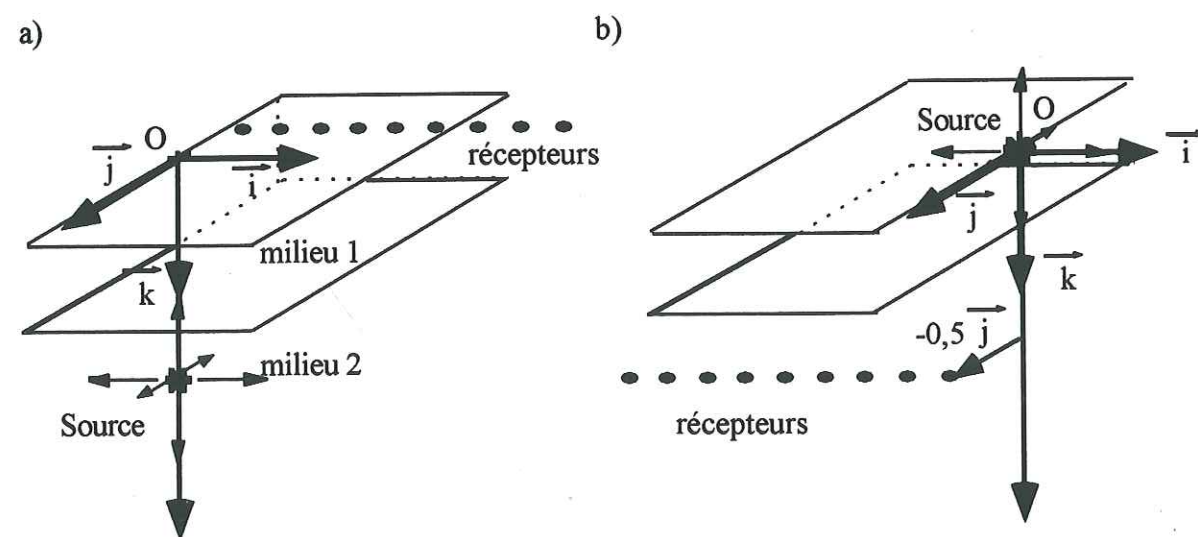
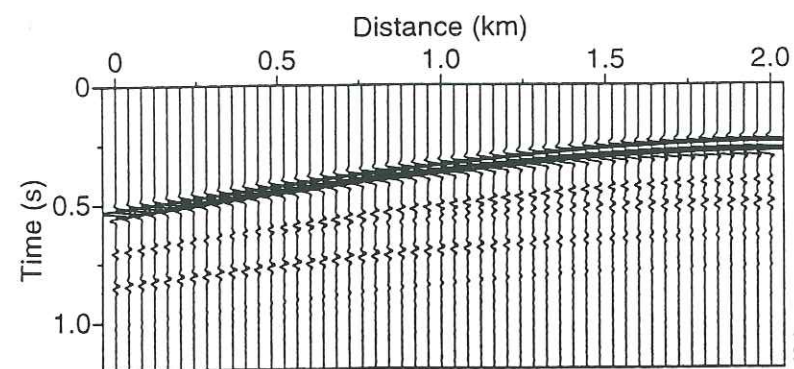


Figure II.2: Géométrie source récepteur a) source au-dessous du récepteur b) source au-dessus du récepteur.

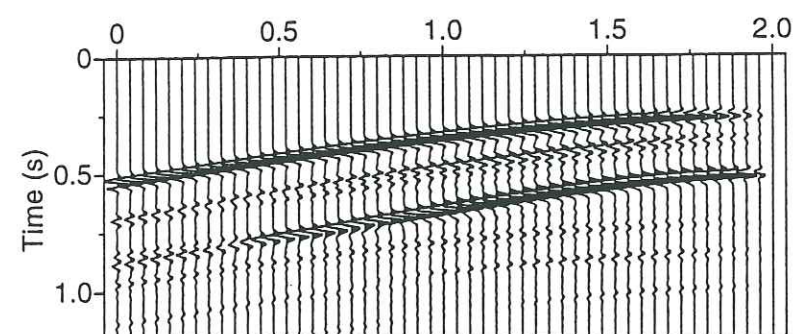
Le dépendance temporelle de la source est un signal de Ricker de fréquence dominante 20 Hz. Les signaux sont calculés pour une durée de 2 secondes. Sur les 8×4 sections sismiques représentées sur les pages suivantes les indices « up » et « dw » désignent les géométries considérées, « up » représente le cas où la source est au dessous des récepteurs, « dw » est le cas où la source est au-dessus des récepteurs.

Si l'on compare par exemple les sections notées « D_x/F_y -dw » et « D_y/F_x -up » on s'aperçoit que les formes d'ondes des sismogrammes sont parfaitement symétriques. Le chiffre qui figure en légende de chacune des 32 sections à 51 traces représentent la valeur maximale de la section. Dans notre exemple, les valeurs maximales coïncident exactement et sont égales à 4,76997. Les signaux comparés présentent par conséquent des formes d'ondes identiques avec des amplitudes égales. Cette conclusion peut s'étendre à tous les profils, ce qui montre que le théorème de réciprocité est vérifié.



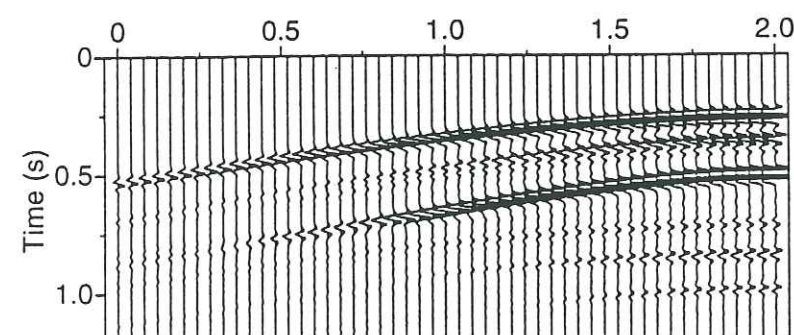
PR / ES - dw

3.72179e+06



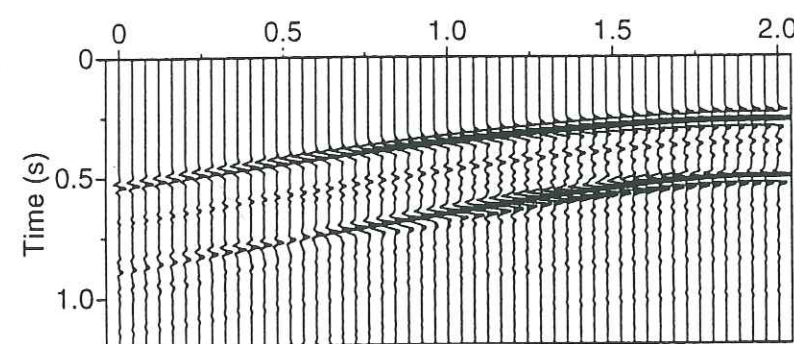
DX / ES - dw

3136.38



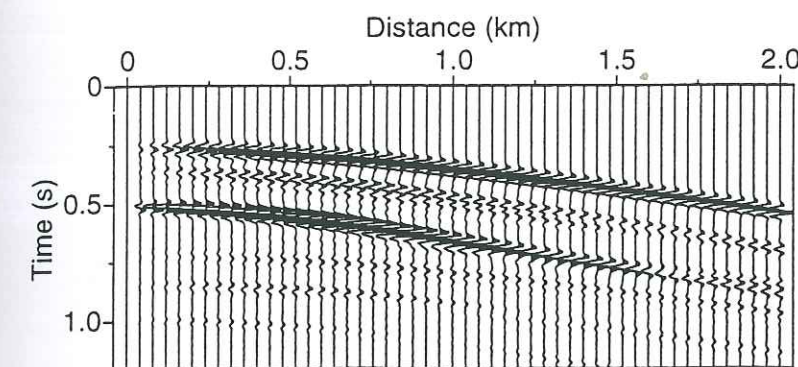
DY / ES - dw

2673.75



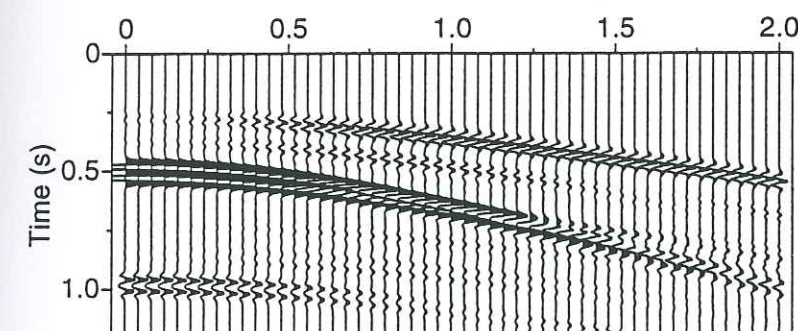
DZ / ES - dw

36.1493



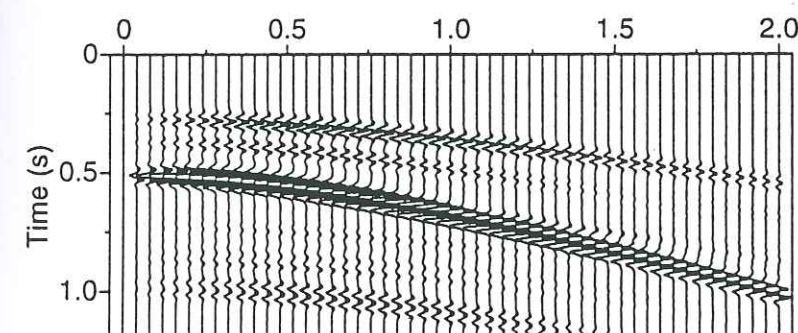
PR / FX - up

3535.15



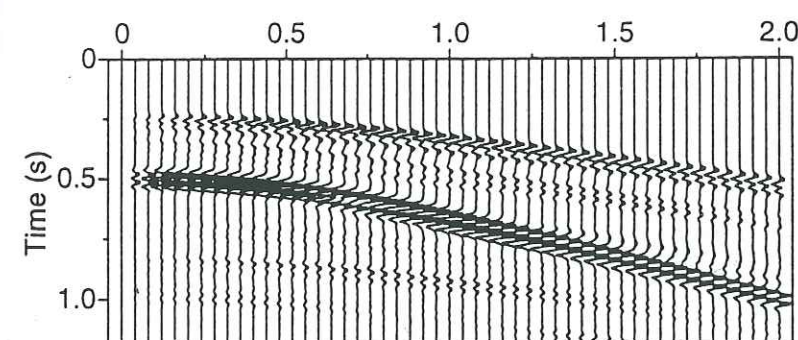
DX / FX - up

7.88075



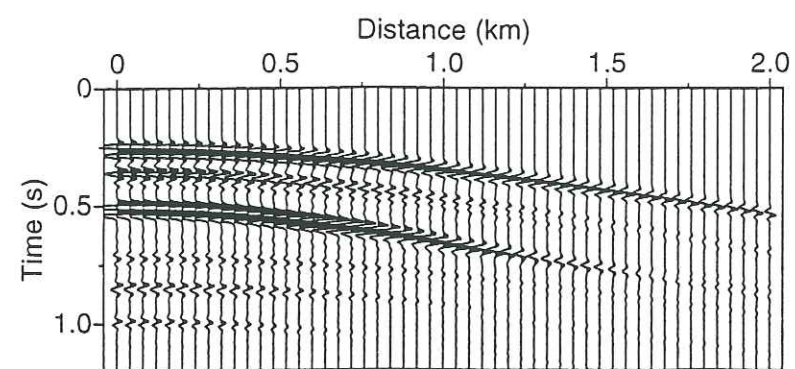
DY / FX - up

4.76997



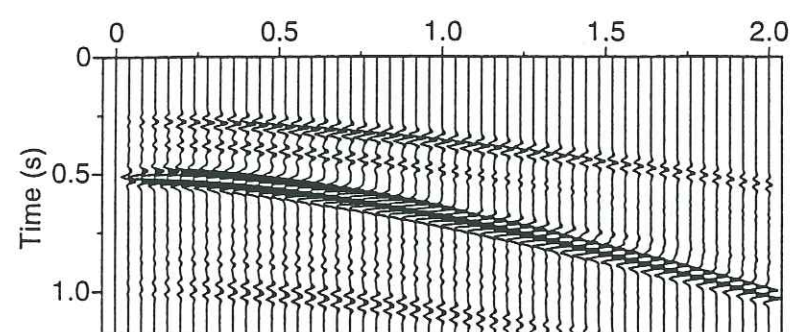
DZ / FX - up

6.10837



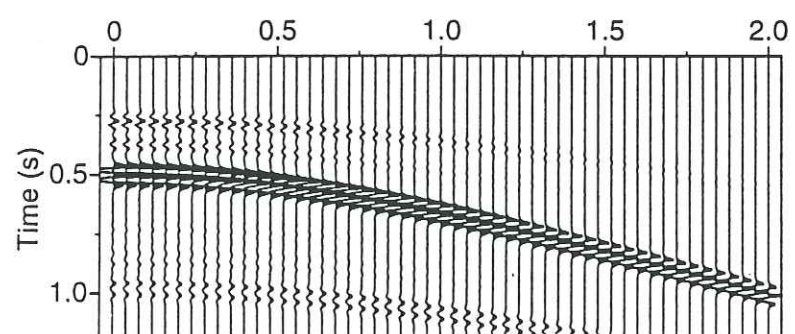
PR / FY - up

2042.01



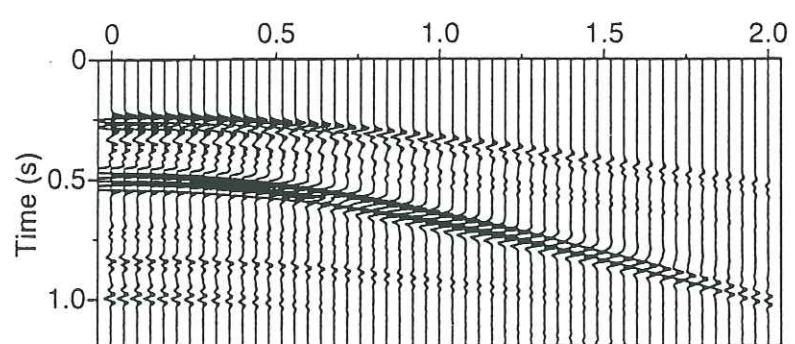
DX / FY - up

4.76997



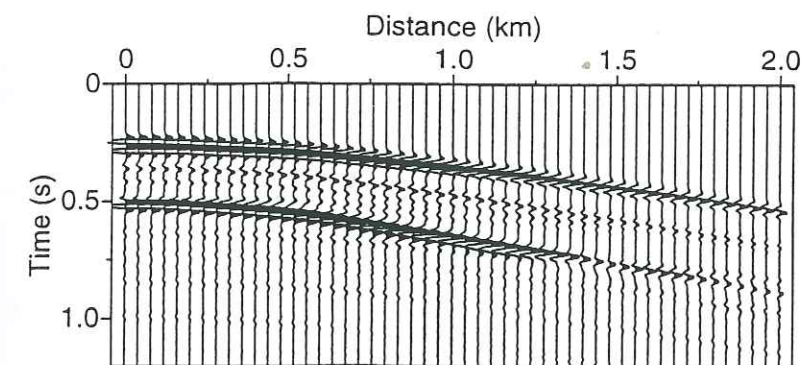
DY / FY - up

13.30.32



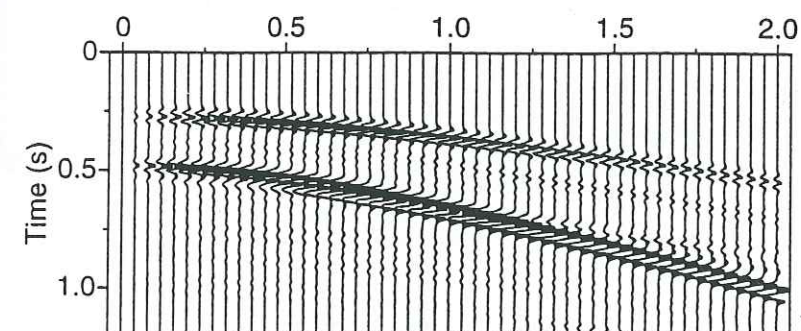
DZ / FY - up

4.77414



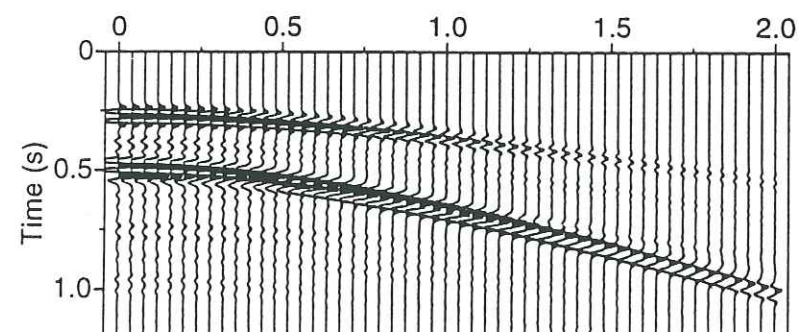
PR / FZ - up

1719.5



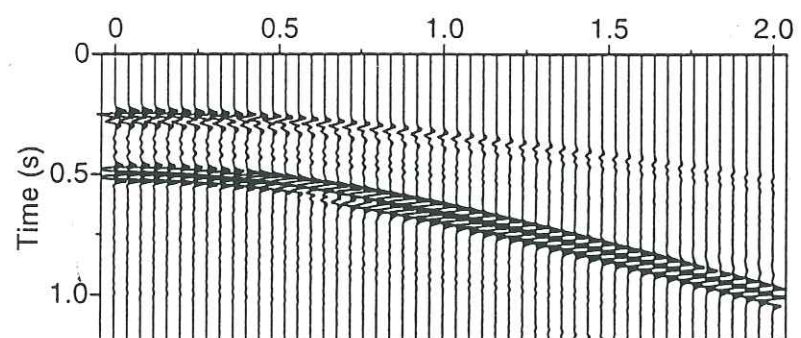
DX / FZ - up

3.67108



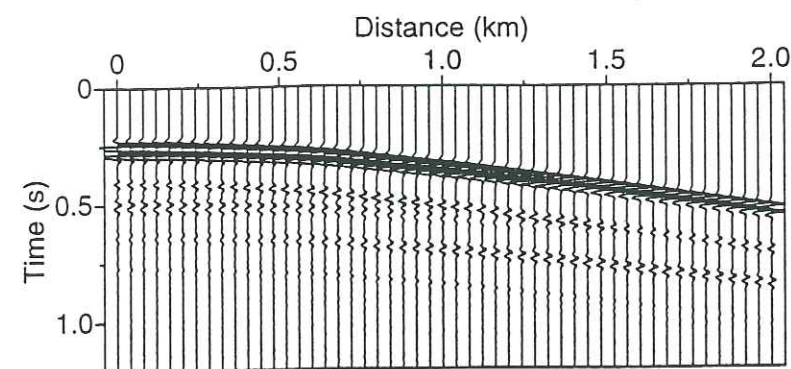
DY / FZ - up

2.75693



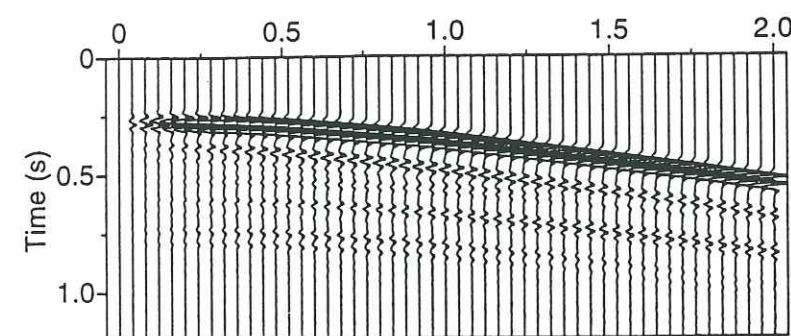
DZ / FZ - up

6.67177



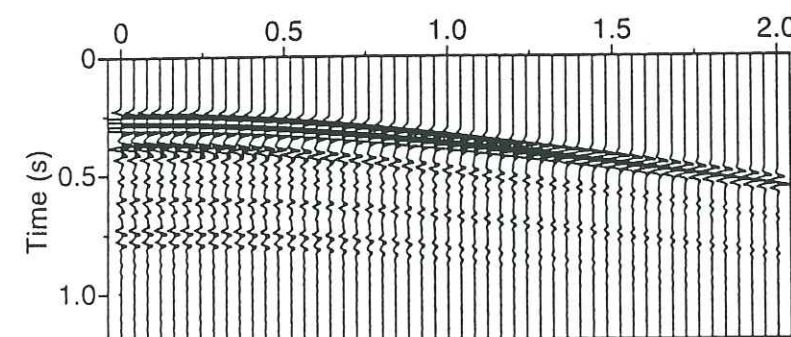
PR / ES - up

3.72177e+06



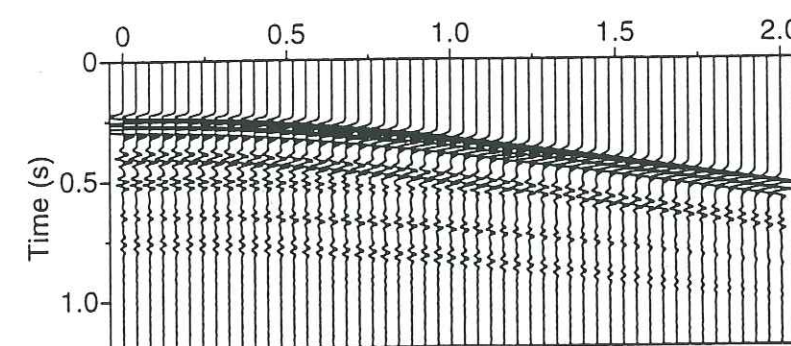
DX / ES - up

3535.15



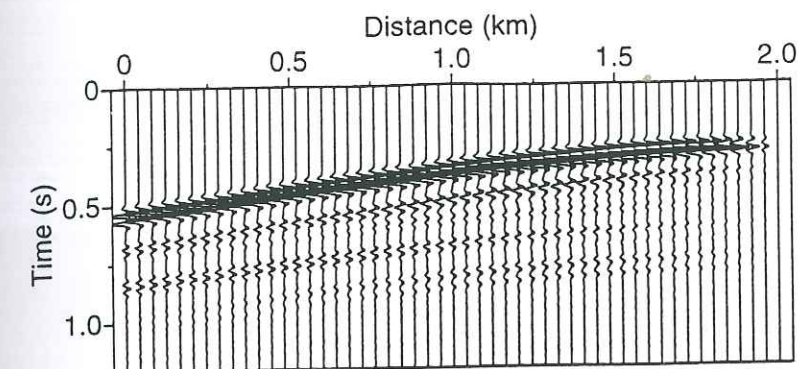
DY / ES - up

2042



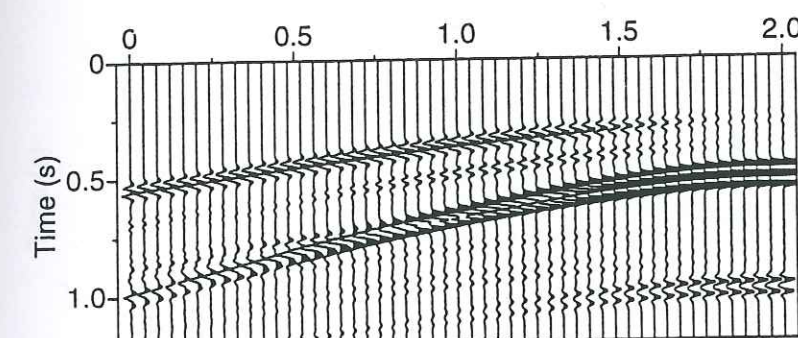
DZ / ES - up

1719.51



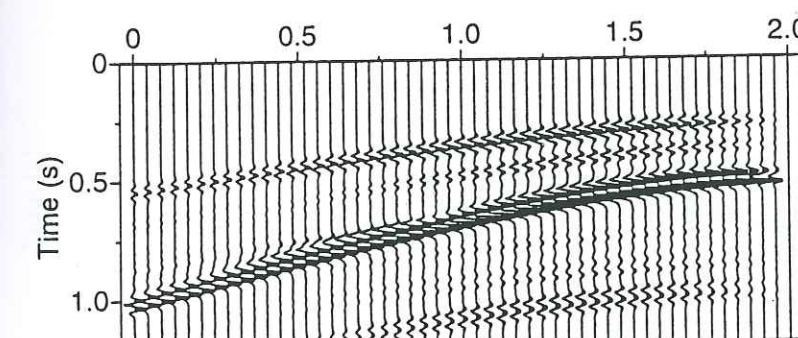
PR / FX - dw

3136.37



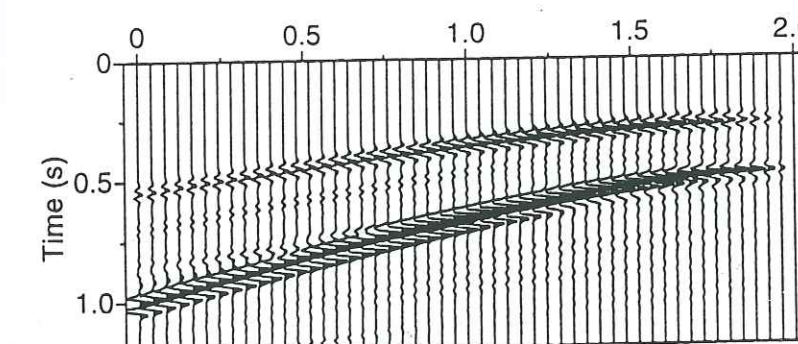
DX / FX - dw

7.88075



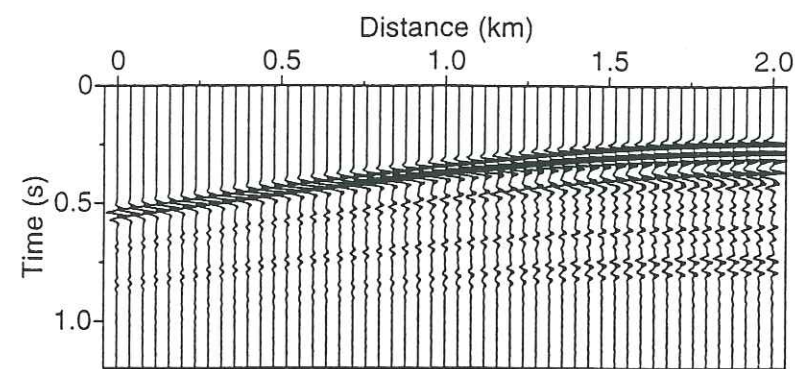
DY / FX - dw

4.76997



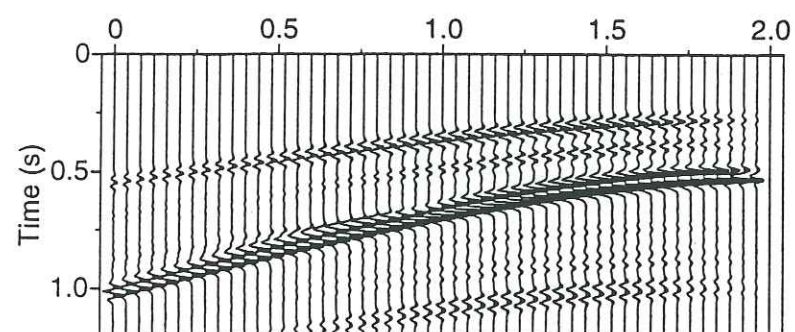
DZ / FX - dw

3.67108



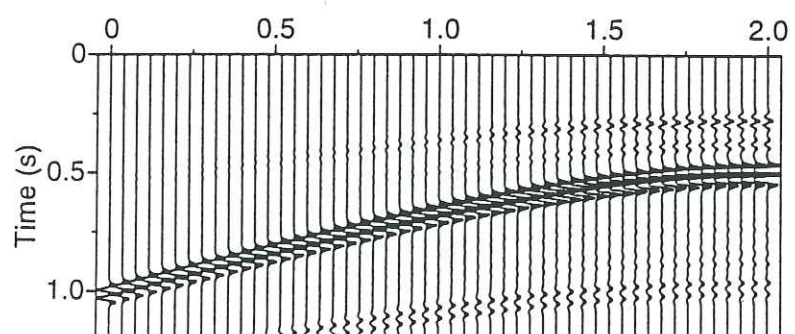
PR / FY - dw

2673.74



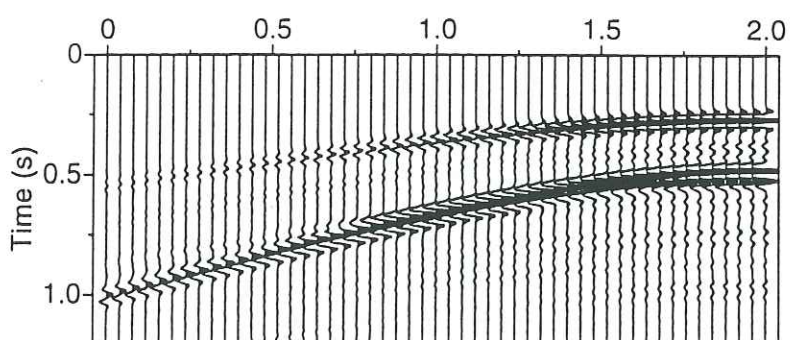
DX / FY - dw

4.76997



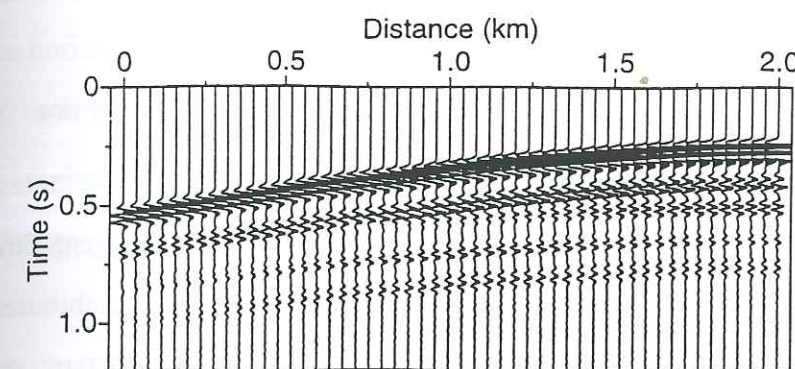
DY / FY - dw

13.30.32



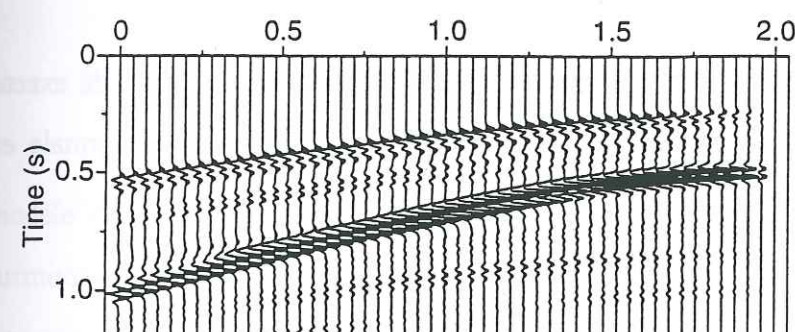
DZ / FY - dw

2.75693



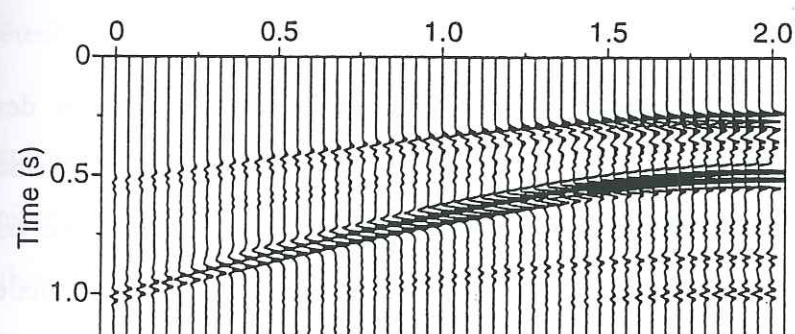
PR / FZ - dw

3614.96



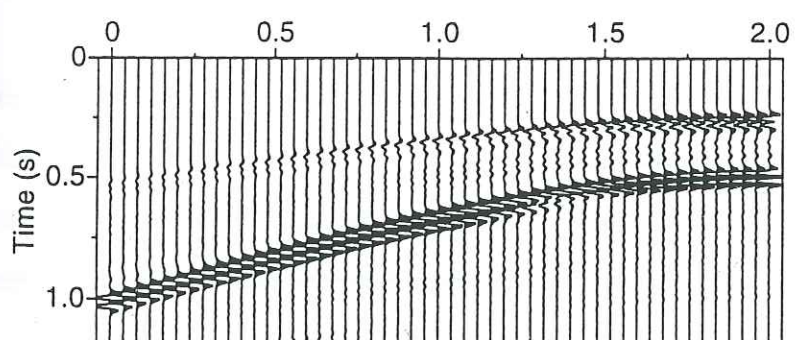
DX / FZ - dw

6.10837



DY / FZ - dw

4.77143



DZ / FZ - dw

6.67176

IV. Particularités du programme

Les possibilités de simulation qu'offrent un tel programme sont importantes, notamment en ce qui concerne les positions des sources et des capteurs qui peuvent être placés n'importe où dans le milieu. Il est possible de prendre en compte de nombreuses géométries sources/récepteurs, en particulier des dispositifs d'acquisition horizontaux ou verticaux proches de la surface ou du fond de mer, ou encore des simulations d'enregistrements de sismographes fond de mer (OBS).

Les conditions aux limites à l'interface eau-sédiments sont résolues de manière exacte en assurant la continuité du déplacement vertical, la continuité de la contrainte normale et l'annulation de la contrainte tangentielle.

V. Visualisation de fronts d'ondes en milieu océanique

A. Le cube des données $S(t,r,z)$

Nous avons généré des instantanés de propagation des fronts d'ondes à partir des sismogrammes calculés. Ce type de représentation facilite non seulement la compréhension des sismogrammes, mais permet également d'étudier la répartition de l'énergie acoustique ou sismique en fonction du temps de propagation, de la profondeur, et de la distance horizontale à la source. Des programmes de visualisation adaptés aux environnements X-Window ou PostScript permettent aussi de créer de véritables animations de la propagation des ondes par un enchaînement rapide des différents instantanés.

La réalisation de ces instantanés est obtenue de manière implicite avec certaines méthodes de calcul de sismogrammes synthétiques telles que les méthodes de différence finies ou d'éléments finis qui utilisent un maillage fin du milieu de propagation. La méthode de simulation employée ici autorise également ce type de représentation, car il est possible de calculer les champs d'ondes en tout point du milieu. En effet, le résultat principal du programme de modélisation est un "cube" de données $S(t,r,z)$ dont les trois côtés sont les dimensions temporelle t , spatiale r , et spatiale z des champs d'ondes calculés, on se restreint

ici à une propagation purement P - SV . Il est donc possible d'effectuer des "coupes" verticales ou horizontales à travers ce cube pour visualiser

- soit des profils sismiques horizontaux à $z = z_I$ constant: $S_H(t,r|z_I) = S(t,r,z=z_I)$,
- soit des profils sismiques verticaux à $r = r_I$ constant: $S_V(t,z|r_I) = S(t,r=r_I,z)$,
- soit des représentations instantanées à $t = t_I$ constant: $S_T(r,z|t_I) = S(t=t_I,r,z)$.

En pratique, les instantanés sont obtenus en calculant l'enveloppe des sismogrammes $S(t,r,z)$ (module du signal analytique), en sélectionnant les données $S_T(r,z|t_I)$ pour plusieurs valeurs du paramètre t_I , et en contournant le résultat à l'aide d'un programme adéquat.

B. Evolution temporelle des champs d'ondes

Cette procédure de calcul et de visualisation des instantanés a été appliquée à un modèle de croûte océanique typique présentant une couche d'eau de 4,3 km d'épaisseur surmontant une première couche de sédiments saturés en eau d'un kilomètre d'épaisseur, puis une deuxième couche de matériaux plus compacts où le gradient de vitesse des ondes P est de $0,5 \text{ s}^{-1}$. Un petit saut de vitesse fait la transition avec une couche basaltique homogène qui s'étend jusqu'au Moho à 12 km de profondeur.

Les champs d'ondes ont été calculés sur une durée de 12 s pour une source ponctuelle explosive dont la fréquence dominante est de 7 Hz. Les capteurs ont été répartis uniformément dans la couche d'eau et le milieu solide selon un quadrillage allant de 0 à 25 km suivant la direction x , et de 2 à 13 km suivant la direction verticale z . Ce quadrillage présente des cellules carrées de 200 m de côté. Les calculs ont été réalisés à la fois pour le champ de pression et les champs de déplacements vertical et horizontal.

Les figures II.3 et II.4 montrent l'évolution temporelle du champ de pression, et du déplacement horizontal pour les instantanés numéros 17, 24 et 55. Ces instantanés sont séparés par un nombre entier d'incrémentes en temps $\Delta t = 0,19 \text{ s}$. Les instantanés 17 montrent le front d'onde direct juste après avoir rencontré les deux premières interfaces où le front d'onde s'est réfléchi vers le haut et s'est transmis vers le bas.

Quelques instants plus tard (instantanés 24), on observe le décrochement du front d'onde descendant à 5,3 km de profondeur, au niveau de l'interface entre la couche de sédiments et le toit de la zone à gradient où la vitesse des ondes P passe brutalement de 2 km/s

à 4,2 km/s. Ce décrochement correspond à une propagation plus rapide des ondes P dans le milieu inférieur à l'angle critique. L'instantané 24 montre également, et de manière très claire, que le front d'onde descendant dans la zone à gradient est connecté au front d'onde réfléchi au toit de la zone à gradient par un front d'onde plan qui se propage en direction de la surface. Ce front d'onde correspond à l'onde conique (d'axe vertical) associée à l'onde réfractée au toit de la zone à gradient (ou guidée le long de cette interface par le gradient). Les mêmes figures permettent aussi de se rendre compte de l'avance que prennent les ondes transmises en profondeur dans la zone à gradient par rapport à celles qui restent confinées dans la partie supérieure du gradient. Enfin, on notera que des interférences constructives apparaissent dans cette zone, qui correspondent à des taches d'énergie bien visibles.

L'évolution ultérieure des fronts d'ondes se traduit par des instantanés de plus en plus complexes, surtout dans la partie supérieure du modèle, où des réflexions multiples très nombreuses prennent place dans les deux guides d'ondes principaux que sont la couche d'eau et la couche de sédiments (instantanés 55). On peut noter en effet que l'énergie se renforce progressivement dans ces deux niveaux en fonction du temps de propagation.

Dans la couche sédimentaire les contrastes de vitesse sont tels que les ondes de cisaillement y sont piégées.

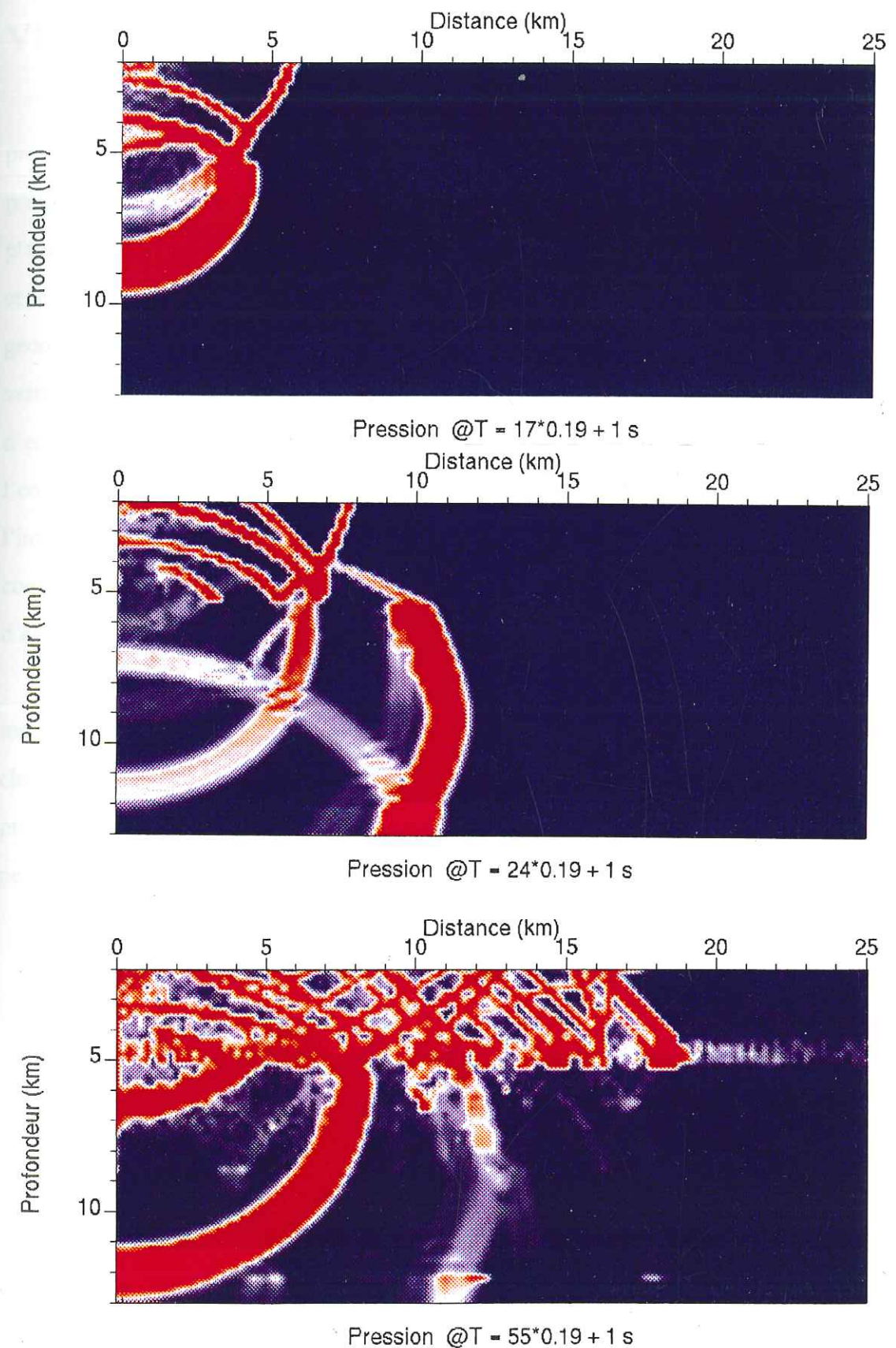


Figure II.3 Instantané 17 ($t = 1.323$ s), Instantané 24 ($t = 1.456$ s), Instantané 55 ($t = 2.045$ s) du champ de pression.

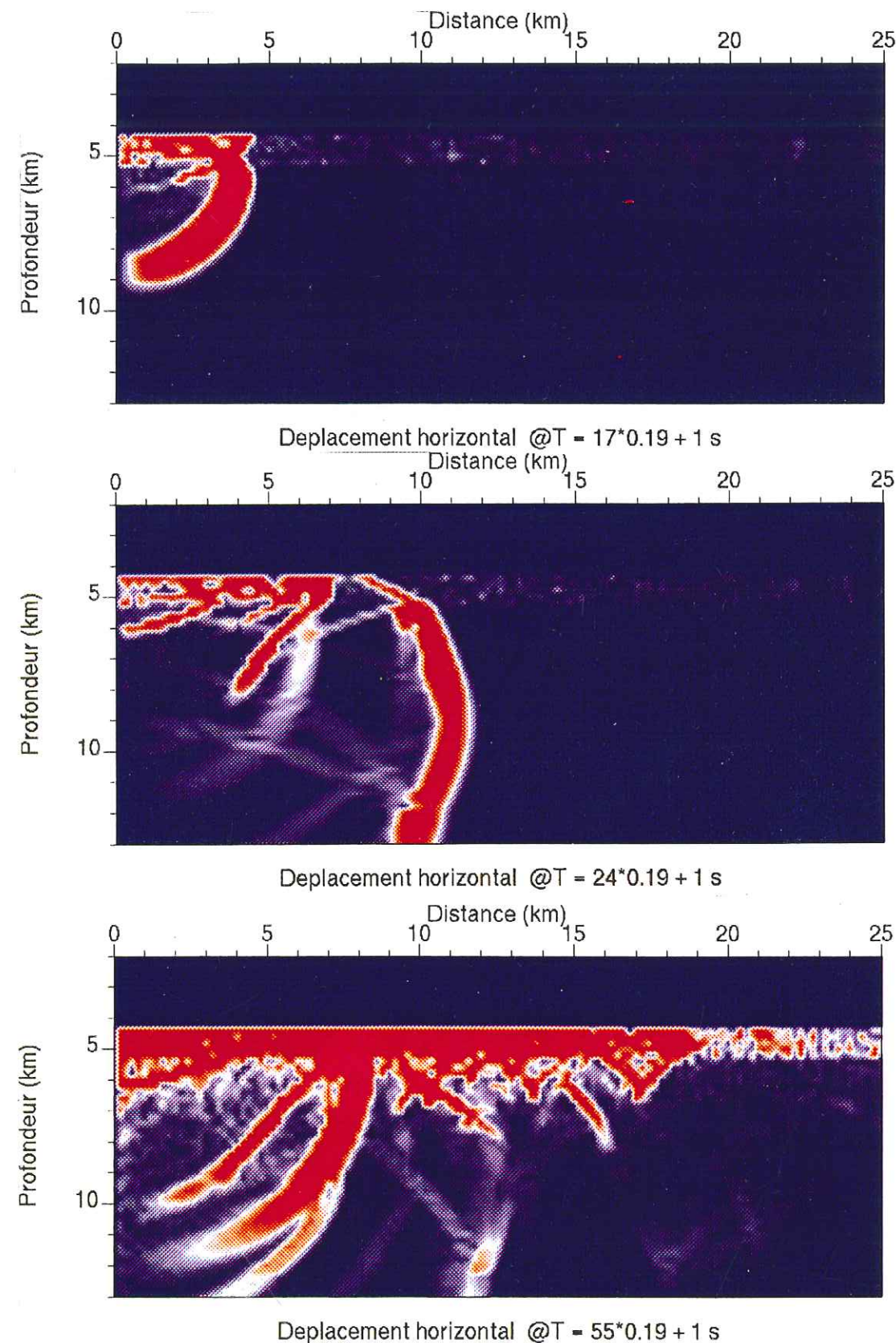


Figure II.4 Instantané 17 ($t = 1.323$ s), Instantané 24 ($t = 1.456$ s), Instantané 55 ($t = 2.045$ s) du déplacement vertical.

VI. Conclusion

L'approche que nous avons de la méthode de calcul fournit des résultats dont la précision numérique est très bonne. Les possibilités de simulations qu'offrent un tel programme sont intéressantes notamment dans les choix qu'il nous est possible de faire pour placer la source par rapport aux récepteurs, la seule restriction est de ne pas placer la source et le récepteur à la même profondeur. Il est possible de prendre en compte de nombreuses géométries sources/récepteurs, en particulier des dispositifs d'acquisition horizontaux ou verticaux proches de la surface ou du fond de mer, ou encore des simulations d'enregistrements de sismographes fond de mer (OBS). Il est possible de calculer uniquement l'onde directe aussi de ne pas tenir compte de la réflexion sur la surface libre. On peut à l'inverse ne calculer que les ondes réfléchies. L'intérêt dans certain cas est un gain de temps considérable comme lorsque la source et le récepteur sont trop proches, ceci a pour effet d'accélérer la procédure de convergence.

La formulation permet aussi de calculer facilement les expressions analytiques des tenseurs de Green et leurs dérivées spatiales et temporelles. Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, cela permet d'établir l'expression du champ d'onde diffracté comme la propagation d'un champ de référence entre la source sismique et la localisation de la perturbation qui sera propagée jusqu'au récepteur.

Chapitre 3 :Sensibilité des champs d'ondes au premier ordre: calcul des dérivées de Fréchet des sismogrammes

I. Introduction

Ce chapitre propose deux méthodes d'évaluation des dérivées de Fréchet à partir des tenseurs de Green calculés par la méthode décrite dans le chapitre précédent. Les effets de diffraction au premier ordre des ondes élastiques générées par des sources ponctuelles pour deux géométries et deux formulations différentes sont calculés. La deuxième de ces formulations permet de calculer les effets au premier ordre de la diffraction générée par une inhomogénéité plane d'extension infinie dans un milieu tabulaire. Elle est particulièrement bien adaptée à la méthode d'inversion que nous présenterons dans le chapitre suivant.

II. Détermination de l'opérateur des dérivées de Fréchet: position du problème.

Si le modèle \mathbf{m} est perturbé d'une faible quantité $\delta\mathbf{m}$, définissant un nouveau modèle $\mathbf{m} + \delta\mathbf{m}$, en utilisant un développement de Taylor de l'opérateur de modélisation f , on peut écrire:

$$f(\mathbf{m} + \delta\mathbf{m}) = f(\mathbf{m}) + F\delta\mathbf{m} + O(\|\delta\mathbf{m}\|^2) \quad (3.1)$$

ou encore

$$\delta f = F\delta\mathbf{m} \quad (3.2)$$

ou

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{m}} \quad (3.3)$$

\mathbf{F} est un opérateur linéaire qui relie une petite perturbation du modèle, $\delta\mathbf{m}$, à une petite perturbation du champ d'ondes δf . La connaissance de cet opérateur permet de prédire les changements en amplitude et en forme d'onde qui seront observés sur une trace sismique donnée lorsqu'un paramètre du milieu est faiblement modifié.

Tarantola (1984) exprime analytiquement les dérivées de Fréchet en perturbant directement l'équation de l'élastodynamique par rapport à la densité et aux paramètres de Lamé. Ce choix de paramètres est pour l'instant préféré à celui que nous utiliserons par la suite pour l'inversion et qui est constitué de la densité, l'impédance P et impédance S (cf chapitre 4), car l'équation de l'élastodynamique dépend linéairement de ces paramètres.

On note $\rho(\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x})$ les expressions de la densité et des paramètres de Lamé au point \mathbf{x} . $u_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)$ est le déplacement au point \mathbf{x}_r et au temps t dans la direction i pour une force de volume agissant en \mathbf{x}_s .

$$\begin{aligned} R_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s | \mathbf{x}) &= \frac{\partial u^i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}{\partial \rho(\mathbf{x})} \\ A_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s | \mathbf{x}) &= \frac{\partial u^i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}{\partial \lambda(\mathbf{x})} \\ B_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s | \mathbf{x}) &= \frac{\partial u^i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s)}{\partial \mu(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (3.5)$$

sont les expressions des dérivées de Fréchet pour une perturbation de la densité et des paramètres de Lamé localisés au point \mathbf{x} de l'espace des modèles.

Nous allons brièvement présenter les principales étapes qui permettent de donner les expressions analytiques des fonctions R_i , A_i , B_i .

III. Résolution

A. Propagation dans le milieu non -perturbé

Dans une région \mathcal{D} de l'espace, le mouvement engendré par une force de volume $f^i(\mathbf{x}, t)$ est gouverné par l'équation différentielle (Hudson & Heritage, 1981):

$$\mathbf{L}(u^i(\mathbf{x}, t)) = f^i(\mathbf{x}, t) \quad (3.6)$$

où l'opérateur d'onde \mathbf{L} s'écrit:

$$\mathbf{L} = \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u^i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^j} [c^{ijkl}(\mathbf{x}) u_{kl}(\mathbf{x}, t)] \quad (3.7)$$

c^{ijkl} représente le tenseur des paramètres élastiques:

$$c^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk})$$

$u_{kl}(\mathbf{x}, t)$ est le tenseur des contraintes que l'on définit de la façon suivante:

$$u_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) \quad (3.8)$$

Les limites de \mathcal{D} subissent des tractions qui sont nulles avant l'application de la force. En chaque point de la surface on a la condition limite:

$$[c^{ijkl} u_{kl}(\mathbf{x}, t)] n_j(\mathbf{x}) = T^i(\mathbf{x}, t) \quad (3.9)$$

La force est appliquée au temps t_0 et les conditions initiales sont telles que les déplacements et les vitesses sont nuls avant t_0 .

La solution de l'équation 3.6 s'exprime à l'aide des fonctions de Green du problème. Le déplacement au point \mathbf{x}_r au temps t , pour une distribution de force $f^i(\mathbf{x}, t)$ s'écrit

$$u^i(\mathbf{x}_r, t) = \int_{\mathcal{D}} d\mathbf{v}(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}, t_0) * f^j(\mathbf{x}, t) \quad (3.10)$$

La sommation répétée sur les indices est implicite. La notation $G_{ij}(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}, t_0)$ du tenseur de Green a déjà été introduite dans le chapitre 2. L'intégrale (3.10) porte sur les positions \mathbf{x} à l'intérieur de l'espace \mathcal{D} . Si l'on considère une force ponctuelle localisée en \mathbf{x}_s dans un milieu localement uniforme, l'expression de $f^j(\mathbf{x}, t)$ devient:

$$f^j(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) * S(t) \quad (3.11)$$

où $\delta(\mathbf{x})$ est la fonction delta, et $S(t)$ la partie temporelle de la fonction source. Dans ce cas particulier la solution de (3.10) pour une force impulsionnelle dans la direction j s'écrit:

$$u^i(\mathbf{x}, t) = G_{ij}(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s, t_0) * S(t) \quad (3.12)$$

Les expressions analytiques des tenseurs de Green pour des milieux tabulaires, figurent en annexe de l'article.

B. Dérivées de Fréchet

On considère de faibles perturbations des paramètres ρ , λ et μ , notées $\delta\rho$, $\delta\lambda$ and $\delta\mu$ au point \mathbf{x} de \mathcal{D} . ρ' , λ' et μ' désignent les paramètres perturbés. Ainsi

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{x}) &= \rho(\mathbf{x}) + \delta\rho(\mathbf{x}) & |\delta\rho(\mathbf{x})| &<< \rho(\mathbf{x}) \\ \lambda'(\mathbf{x}) &= \lambda(\mathbf{x}) + \delta\lambda(\mathbf{x}) & |\delta\lambda(\mathbf{x})| &<< \lambda(\mathbf{x}) \\ \mu'(\mathbf{x}) &= \mu(\mathbf{x}) + \delta\mu(\mathbf{x}) & |\delta\mu(\mathbf{x})| &<< \mu(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les faibles perturbations localisées de la densité et des paramètres de Lamé entraînent de faibles perturbations du champ d'onde. On écrit de cette façon le champ de déplacement comme la somme d'un champ primaire et d'un champ diffracté:

$$u^i(\mathbf{x}_r, t) = u^i(\mathbf{x}_r, t) + \Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) &= \int_{\mathcal{D}} R_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}, t_0) \delta\rho(\mathbf{x}) + \\ &A_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}, t_0) \delta\lambda(\mathbf{x}) + \\ &B_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}, t_0) \delta\mu(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le problème est maintenant de résoudre l'équation de l'élastodynamique pour le milieu perturbé. La propagation des ondes est maintenant décrite par le nouvel opérateur d'onde:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$$

où \mathbf{L}' et $\Delta\mathbf{L}$ sont les opérateurs définis par ρ' , λ' , μ' et $\Delta\rho$, $\Delta\lambda$, $\Delta\mu$. En utilisant les notations précédemment introduites concernant les paramètres élastiques on peut écrire:

$$\delta c^{ijkl} = \delta\lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \delta\mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk}) \quad (3.16)$$

l'équation à résoudre devient:

$$(\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L})(u^i(\mathbf{x}_r, t) + \Delta u^i(\mathbf{x}_r, t)) = f^i(\mathbf{x}, t) \quad (3.17)$$

soit:

$$\mathbf{L}u^i(\mathbf{x}_r, t) + \Delta\mathbf{L}u^i(\mathbf{x}_r, t) + \Delta\mathbf{L}\Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) + \mathbf{L}\Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) = f^i(\mathbf{x}, t) \quad (3.18)$$

En utilisant (3.6) et l'approximation de Born qui néglige le terme $\Delta\mathbf{L}\Delta u^i(\mathbf{x}_r, t)$ qui est du second ordre comparé aux autres termes, l'équation précédente se simplifie en:

$$\mathbf{L}\Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) = -\Delta\mathbf{L}u^i(\mathbf{x}_r, t) \quad (3.19)$$

Concernant les conditions aux limites de \mathcal{D} on écrit:

$$[(c^{ijkl} + \delta c^{ijkl})(u_{kl} + \Delta u_{kl})]n_j(\mathbf{x}) = T^i(\mathbf{x}, t) + \delta T^i(\mathbf{x}, t) \quad (3.20)$$

d'où

$$[c^{ijkl} \Delta u_{kl}]n_j(\mathbf{x}) = \delta T^i(\mathbf{x}, t) - [\delta c^{ijkl} u_{kl}]n_j(\mathbf{x}) \quad (3.21)$$

Dès lors le problème posé s'écrit:

$$\mathbf{L}\Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) = \Delta f^i(\mathbf{x}, t) \quad (3.22)$$

$$[c^{ijkl} \Delta u_{kl}]n_j(\mathbf{x}) = \Delta T^i(\mathbf{x}, t) \quad (3.23)$$

La structure de (3.22) et (3.23) est un résultat général sur la diffraction des ondes. Les termes $\Delta u^i(\mathbf{x}_r, t)$ engendrés par les perturbations $\delta\rho$, $\delta\lambda$ et $\delta\mu$ s'interprètent comme un champ d'onde généré par des forces de volume secondaires $\Delta f^i(\mathbf{x}, t)$ avec les conditions aux limites $\Delta T^i(\mathbf{x}, t)$ à la frontière du milieu perturbé. Le champ se propage dans le milieu non perturbé au moyen de l'opérateur \mathbf{L} . D'après (3.19) l'expression de la force de volume secondaire s'obtient facilement et l'on a:

$$\Delta f^i(\mathbf{x}, t) = -\Delta\mathbf{L}u^i(\mathbf{x}_r, t)$$

et compte tenu de (3.18) et (3.6) on a:

$$\Delta f^i(\mathbf{x}, t) = -\delta\rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u^i(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^j} [\delta c^{ijkl}(\mathbf{x}) u_{kl}(\mathbf{x}, t)] \quad (3.22)$$

et d'après (3.21) les conditions limites s'écrivent:

$$\Delta T^i(\mathbf{x}, t) = \delta T^i(\mathbf{x}, t) - [\delta c^{ijkl} u_{kl}] n_j(\mathbf{x}) \quad (3.23)$$

En utilisant (3.10) et en tenant compte des conditions limites, pour une force impulsionnelle dans la direction j le champ diffracté s'écrit:

$$\Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) = \int_V dv(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s, t_0) * \Delta f^j(\mathbf{x}, t) + \int_S dS(\mathbf{x}) G_{ij}(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s, t_0) * \Delta T^j(\mathbf{x}, t) \quad (3.24)$$

En substituant les termes de force et de traction par leurs expressions dans (3.22) et (3.23) et après des manipulations algébriques qui impliquent des intégrations par parties de l'intégrale (3.24), le champ diffracté $\Delta u_i(\mathbf{x}_r, t)$ s'écrit (Tarantola, 1984):

$$\begin{aligned} \Delta u^i(\mathbf{x}_r, t) = & - \int_V dv(\mathbf{x}) \dot{G}_{ji}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r, t_0) * \dot{u}_j(\mathbf{x}, t) \delta \rho(\mathbf{x}) \\ & - \int_V dv(\mathbf{x}) G_{li}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r, t_0) * u_{mm}(\mathbf{x}, t) \delta \lambda(\mathbf{x}) \\ & - 2 \int_V dv(\mathbf{x}) G_{li}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r, t_0) * u_{kl}(\mathbf{x}, t) \delta \mu(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

les astérisques représentent une convolution temporelle, les points une dérivée temporelle. Le tenseur des contraintes $G_{ijk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$ est défini de la façon suivante:

$$G_{ijk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{ik}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')}{\partial x_i} \right)$$

En utilisant les notations précédemment introduites des dérivées de Fréchet (3.5) et (3.15), et pour une force impulsionnelle dans la direction j on a:

$$\begin{aligned} R_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s | \mathbf{x}) &= -\dot{G}_{ji}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r, t_0) * \dot{u}_j(\mathbf{x}, t) \\ A_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s | \mathbf{x}) &= -G_{li}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r, t_0) * u_{mm}(\mathbf{x}, t) \\ B_i(\mathbf{x}_r, t; \mathbf{x}_s | \mathbf{x}) &= -2G_{li}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_r, t_0) * u_{kl}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.28)$$

En transformant cette égalité dans le domaine fréquence-nombre d'onde, et en l'exprimant dans un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) on retrouve la formulation de Dietrich et Kormendi (1990) pour les dérivées de Fréchet exprimées dans le plan de propagation P - SV (cf annexe 1). A partir de ces deux formulations des dérivées de Fréchet, nous estimons à présent la sensibilité de la réponse sismique d'un milieu tabulaire à des variations des propriétés élastiques du milieu.

IV. Calcul des sismogrammes synthétiques différentiels pour des sources ponctuelles dans un milieu stratifié plan.

A. Application: article soumis à *B.S.S.A.*, juillet 1997.
Computation of differential seismograms for point sources in layered media

Computation of differential seismograms
for point sources in layered media

F. Moinet and M. Dietrich

LGIT, CNRS & Univ. Joseph Fourier
BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

Submitted for publication in the
Bulletin of the Seismological Society of America
July 1997.

ABSTRACT

The first-order scattering effects of elastic waves generated by point sources in layered media are computed using two different geometries and formulations. We first consider point diffractors embedded in stratified media and use the analytical formulation of the Fréchet derivatives of seismograms to compute the three-dimensional radiation of spatial distributions of point scatterers in vertically inhomogeneous media. In order to test this formulation and assess its limitations, we consider the simple case of reflected and transmitted waves at plane interfaces by representing these interfaces with regular arrangements of point diffractors. It is shown, in particular, that a minimum of seven point scatterers per wavelength is necessary to correctly represent the reflection and transmission effects at the interfaces. We then propose a fast and convenient formulation to calculate the first-order scattering by plane inhomogeneities of infinite extent within a layered elastic medium. The computation method uses a Fourier-Bessel transform of the Fréchet derivatives of the plane-wave response, integrated analytically over the plane of heterogeneity. Our study shows that the first-order scattering theory is remarkably accurate at angles of incidence not exceeding 35 degrees, and that the formulation used allows us to model density or velocity perturbations of up to 10 per cent. These conclusions are in close agreement with the results obtained previously in the plane-wave domain. The expressions presented may be useful in assessing the sensitivity of the seismic response of depth-dependent elastic media to various combinations of elastic parameters. They are also directly applicable to linearized inversion algorithms of seismograms using gradient techniques.

I. INTRODUCTION

The complex seismic wavefield produced by scattering in a heterogeneous medium can be simulated by complicated artificial sources acting in a relatively simple structure. This fundamental property was notably used by Spudich and Iida (1993) in a deterministic analysis of the coda of seismograms in order to identify actual scattering structures in the Earth crust. The concept of secondary sources explicitly appears in weak scattering theory (see e.g. Aki and Richards, 1980), as well as in the derivation of analytical expressions of the Fréchet derivatives of seismograms. The latter are defined as the partial derivatives of seismograms with respect to the material properties and are called differential or perturbational seismograms when evaluated numerically. By applying a first-order perturbation analysis to the elastodynamic wave equation, Tarantola (1984) derived a series of formulae relating the scattered wavefield to heterogeneities in the medium properties via the primary (incident) wavefield and the Green's functions of the unperturbed medium. The same approach was subsequently used in a more restrictive sense for layered media in the plane-wave domain by Pan *et al.* (1988) in the acoustic case, and by Dietrich and Kormendi (1990, Paper I) in the P - SV case.

The analytical formulations of the Fréchet derivatives are particularly useful for conducting sensitivity studies of a seismic wavefield to various combinations of density and elastic parameters. They are equally helpful for the implementation of linearized full waveform inversion algorithms which demand a numerical evaluation of the differential seismograms for the computation of the gradient of the cost function (see e.g. Mora, 1987; Kormendi and Dietrich, 1991). Indeed, the most intuitive procedure to compute the whole set of differential seismograms in a structure described by N parameters is to use a finite perturbation scheme that requires $N+1$ forward modeling computations. With the Fréchet derivative approach on the other hand, the differential seismograms are computed by solving only one large forward problem. This procedure is therefore faster in terms of computation time, and it is also more accurate than the finite difference approximation to the partial derivatives of seismograms.

Plane layered media are extensively used in earthquake and exploration seismology. They often constitute good starting models for forward and inverse modeling even when the actual structure under study is suspected to be laterally moderately heterogeneous. In addition, the horizontally layered model lends itself to a number of analytical developments since the seismic response of a stratified medium can be written in explicit form. These properties have led McAuley (1985) to derive analytical expressions of the sensitivity operators for P -wave velocity and density by directly computing the derivatives of the global acoustic response of the layering with respect to these variables. This straightforward (but lengthy) approach was also used by Amundsen and Ursin (1991) to estimate the sensitivity to layer thickness, and was further adapted to the P - SV elastic case by Zhao *et al.* (1994). More recently, Zeng and Anderson (1995) proposed an efficient and attractive formulation for the computation of the differential seismogram in a layered elastic solid by using an intermediate procedure between the perturbation of the wave equation and the explicit differentiation of the plane-wave reflectivity function.

In this paper, the Fréchet derivatives approach for computing differential seismograms in horizontally layered structures is revisited. We first examine the case of point scatterers embedded in stratified media and simulate the reflected and transmitted waves at plane interfaces by representing these interfaces with regular arrangements of point diffractors. Next, we propose a new formulation for the evaluation of the differential seismograms with respect to density and elastic parameters in stratified media by noticing the similarity between the general formulae of the Fréchet derivatives in the time-distance domain and their particular expressions in the plane-wave domain.

II. DIFFERENTIAL SEISMOGRAMS FOR POINT DIFFRACTORS

II.1 Theoretical background

The parameters used to simulate model perturbations are the density ρ , the Lamé coefficients λ and μ , and the compressional and shear wave velocities α and β . The natural choice of parameters to carry out a perturbation of the elastodynamic wave equation is the triplet formed by the density and the Lamé parameters because of their linear dependence with the wave equation. The perturbation analysis can then be performed in symbolic form (see, e.g. Dietrich and Kormendi, 1990), and the results can be subsequently extended to other triplets of parameters by changes of variables, as shown below.

We denote by $u_i(\mathbf{x}, t)$ the i -th component of the particle displacement at location \mathbf{x} and time t , and define the Green's function $G_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$ as the i -th component of the displacement at location \mathbf{x} and time t produced by an impulsive force in the j direction at location \mathbf{x}' and time 0. The Fréchet derivatives of the displacement \mathbf{u} with respect to the density ρ and Lamé parameters λ and μ may then be written in the form (Tarantola, 1984, eq. 4.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial \rho(\mathbf{x})} &= -\dot{G}_{ji}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_R) * \dot{u}_j(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial \lambda(\mathbf{x})} &= -G_{iii}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_R) * u_{mm}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial \mu(\mathbf{x})} &= -2G_{iki}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_R) * u_{kl}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1)$$

The above expressions represent the perturbation of the particle displacement at the receiver location \mathbf{x}_R and time t for a perturbation of the medium properties at location \mathbf{x} . The asterisk represents a time convolution and the dot denotes a time derivative.

$u_{ij}(\mathbf{x}, t)$ and $G_{ijk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$ are the (i, j) components of strain tensors defined as

$$u_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) \quad \text{and} \quad G_{ijk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{ik}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

The implicit summation convention over repeated indexes is assumed everywhere so that, for example, the last expression of equations (1) contains as much as 32 terms. The Fréchet derivatives can therefore be calculated from complex combinations of the Green's functions for the unperturbed medium, the primary (incident) displacement fields, and their temporal and spatial derivatives. In the following, we shall consider for simplicity a cartesian coordinate system, although the above formulae may also be implemented in a general system of curvilinear coordinates as indicated by Tarantola (1984).

The Fréchet derivatives with respect to density ρ , P - and S -wave velocities α and β are obtained by a change of variable in equations (1), by using the relations $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ and $\beta^2 = \mu/\rho$. Introducing the Jacobian matrix \mathbf{J} , where ρ and ρ^* denote the density in the two triplets of parameters,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial\rho/\partial\rho^* & \partial\lambda/\partial\rho^* & \partial\mu/\partial\rho^* \\ \partial\rho/\partial\alpha & \partial\lambda/\partial\alpha & \partial\mu/\partial\alpha \\ \partial\rho/\partial\beta & \partial\lambda/\partial\beta & \partial\mu/\partial\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2(\mathbf{x}) - \beta^2(\mathbf{x}) & \beta^2(\mathbf{x}) \\ 0 & 2\rho(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & -4\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) & 2\rho(\mathbf{x})\beta(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

we can write

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial\rho(\mathbf{x})} \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial\alpha(\mathbf{x})} \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial\beta(\mathbf{x})} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial\rho^*(\mathbf{x})} \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial\lambda(\mathbf{x})} \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial\mu(\mathbf{x})} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

Other triplets of parameters may be considered by using the corresponding Jacobian matrices. In addition, the global radiation of a distribution of point diffractors can be evaluated by summing the contributions of all individual scatterers.

Equations (1) are quite general and may be used in various situations. In particular, this formulation allows us to compute the three-dimensional radiation of spatial distributions of point scatterers in depth-dependent elastic media by using the appropriate Green's functions.

In our applications to layered media, the Green's functions are computed with the generalized reflection and transmission method of Kennett (1983) for P -, SV - and SH -waves, combined with a discrete wavenumber integration of the reflectivity in the frequency-wavenumber domain (Bouchon, 1981). Details on the computation of the Green's functions and their derivatives are given in Appendix A.

II.2 Numerical examples

In order to test this model and assess its limitations, we consider here the simple case of reflected and transmitted waves at plane inhomogeneities by representing the interfaces with regular arrangements of point diffractors. As was shown by Trorey (1970) for an acoustic medium and for a coincident source-receiver pair above a weakly reflecting surface, this approach yields the specular reflection for a plane reflector of infinite extent provided that the size and discretization of the contributive zone are correctly chosen. Trorey also pointed out that in the most general case, this approach yields an infinite plane reflection plus diffractions at the edges of the reflector. In order to study these points, we systematically compare the differential seismograms computed with the semi-analytical, semi-numerical method described above with a finite difference approximation to the Fréchet derivatives for plane inhomogeneities of infinite extent. The latter approach consists in numerically computing the difference between the point source response of a one-dimensional reference medium and the response of the same structure after slight modifications of the density and/or wave velocities in thin layers. This solution includes the multiple scattering effects and will therefore be considered as the reference solution in our tests of accuracy of the Fréchet derivative approach.

We first investigate the discretization of the scattering area by considering a homogeneous half space with P - and S -wave velocities respectively equal to 4.5 km/s and 2.5 km/s. A plane rectangular arrangement of point diffractors corresponding to a perturbation in S -wave velocity is located at 2 km depth. We assume, at this point, that the area containing

the point scatterers is large enough to avoid any edge effect within the time window of interest. The medium is excited by a vertical point force acting on the free surface. The source time function is a zero-phase Ricker wavelet with a predominant frequency of 5 Hz. The vertical displacement is computed 2 km away from the seismic source, along the surface. Figure 1 shows the differential seismograms obtained with the Fréchet derivatives method (solid line, point diffractors) and with the discrete perturbation method (dashed line, plane inhomogeneities) for three different discretizations of the scattering area, namely, 2, 4 and 6 point scatterers per wavelength. It is seen that a minimum of 6 point scatterers per wavelength is necessary to obtain a good match between the two signals in terms of amplitude and waveform. Similar computations done by perturbing the density and P -wave velocity lead to the same conclusion.

The size of the integration zone is closely related to the concept of Fresnel zone. The first Fresnel zone of a reflector is implicitly defined as the loci of points such that the traveltimes delay between the central ray obeying Snell's law and the rays diffracted at the edge of the Fresnel zone is half the dominant period of the signal. We consider here an elastic medium with velocity gradients $V_P(z) = 1.5 + z$ km/s and $V_S(z) = 0.86 + 0.6z$ km/s. Figure 2 shows the first Fresnel zones for PP , PS , SP and SS reflections determined at 1 km depth for a source - receiver offset of 3 km and a frequency of 5 Hz. The four elliptic-shaped zones are contained in a rectangle of dimensions 2.7×0.9 km². Figure 3 shows a comparison between the vertical components of the differential seismograms obtained with the Fréchet derivative method (solid line, point diffractors) and with the discrete perturbation method (dashed line, plane inhomogeneities), for perturbations in density (left), P -wave velocity (middle), and S -wave velocity (right) at 1 km depth. In these calculations, point diffractors were regularly distributed over rectangular zones of various sizes centered around the source-receiver midpoint. The scattering areas considered are respectively smaller than (top), roughly equal to (middle) and greater than (bottom) the rectangle bounding the Fresnel zones in Figure 2. This comparison confirms that an integration zone at least as large as the first Fresnel zone is required in order to separate the primary reflections and the diffractions from the edges of the

model, whatever the type of perturbation. These results agree with those obtained by Knapp (1991) in the simple case of a constant velocity acoustic medium and a zero-offset source-receiver configuration. They also suggest that the approach used could be useful to model the first-order diffraction response of weak inhomogeneities of complex shape, especially non-planar surfaces.

A more complicated structure consisting of 10 homogeneous layers is depicted in Figure 4. This model was used to further test the accuracy of the Fréchet derivative approach at oblique angles of incidence, for strong model perturbations or perturbations applied in thick layers. Figure 5 displays the vertical component of differential seismograms obtained with the Fréchet derivative approach (top, point scatterers) and with the discrete perturbation method (bottom, plane inhomogeneities) for weak inhomogeneities at 2 km depth. Figures 5a, 5b and 5c respectively represent perturbations in density (left), P -wave velocity (middle) and S -wave velocity (right). This example shows that when the basic assumptions of the Born approximation are respected, i.e., when small perturbations are applied in thin layers, the first-order Fréchet derivative approach yields the correct solution with good accuracy, even at large offsets. The late arrivals, however, show some minor differences.

In order to make the comparisons more objective, we computed the correlation coefficients between the seismograms obtained with the two methods. Figure 6 shows the correlation coefficient as a function of source-receiver offset for perturbations at 2 km depth in the model presented in Figure 4. A correlation coefficient equal to 1 indicates a perfect agreement between the seismograms. The three series of curves on the left were obtained by changing the thickness of the perturbed layer in the discrete perturbation technique. Since the wavelength of P -waves at 2 km depth for the dominant frequency of 10 Hz is approximately equal to 450 m, the thicknesses considered (1, 10 and 20 m) only represent small fractions of the P wavelength (respectively 0.2, 2.2 and 4.4 %). It is seen that in all cases the accuracy of the Fréchet derivative approach decreases with increasing source-receiver offset, or equivalently, with increasing angle of incidence at the depth of perturbation. This observation

is consistent with the fact that the wavefields interact more strongly with the structure at oblique angles of incidence, thus violating the weak inhomogeneity requirement of the Born approximation. It can also be noted that the strongest mismatches are for perturbations in shear wave velocity. The large errors observed at small offsets, especially for a 1 m thick perturbed layer, are not due to a failure of the Fréchet derivative approach but rather to numerical precision problems when computing the small difference between the reference and perturbed seismograms. In summary, this study shows that the thickness of the perturbed layer is a very sensitive parameter in computing differential seismograms. It also shows that the Fréchet derivative formulation is unable to represent perturbations in "thick" layers, even when the layer thickness represents only a few percents of the incident wavelength. To a certain extent, such effects can be modelled by summing first-order perturbations over the actual layer thickness.

By contrast, the Born approximation used in the derivation of the Fréchet derivatives formulae is much more tolerant to strong perturbations applied in thin layers at small angles of incidence. The curves on the right hand side of Figure 6 were obtained for perturbations in density and P - and S -wave velocities at 2 km depth, and for three different values of relative perturbation of material properties, namely 1%, 10% and 20%. One can notice as before that the Fréchet derivative approach breaks down at large offsets, particularly for perturbations in shear wave velocity. However, this formulation appears to be remarkably accurate for small and moderate angles of incidence up to 30 degrees, and for relative perturbations up to 20%. These results are in very close agreement with those obtained by Dietrich & Kormendi (1990) in the plane-wave domain. They also confirm that the Born approximation can be efficiently used for the inversion of limited aperture seismic data.

III. DIFFERENTIAL SEISMOGRAMS FOR PLANE INHOMOGENEITIES

III.1 Theoretical background

In Dietrich and Kormendi (1990), analytical expressions of the Fréchet derivatives of the plane-wave reflectivity of a stratified medium were derived for P - SV waves in the frequency ω and ray parameter p domain. These expressions are summarized below, for a source at depth z_s , a receiver at depth z_R , and a perturbation at depth z . Defining

$$\begin{aligned} R_U(z_R, \omega, p; z_s | z) &= \frac{\partial U(z_R, \omega, p; z_s)}{\partial \rho(z)} & R_V(z_R, \omega, p; z_s | z) &= \frac{\partial V(z_R, \omega, p; z_s)}{\partial \rho(z)} \\ A_U(z_R, \omega, p; z_s | z) &= \frac{\partial U(z_R, \omega, p; z_s)}{\partial \lambda(z)} & A_V(z_R, \omega, p; z_s | z) &= \frac{\partial V(z_R, \omega, p; z_s)}{\partial \lambda(z)} \\ B_U(z_R, \omega, p; z_s | z) &= \frac{\partial U(z_R, \omega, p; z_s)}{\partial \mu(z)} & B_V(z_R, \omega, p; z_s | z) &= \frac{\partial V(z_R, \omega, p; z_s)}{\partial \mu(z)} \end{aligned} \quad (5)$$

where U and V respectively represent the vertical and horizontal displacements in the plane-wave domain, it was shown that

$$\begin{aligned} R_U &= -\omega^2 (U \bar{G}_{zz} + V \bar{G}_{zx}) & R_V &= -\omega^2 (U \bar{G}_{zx} + V \bar{G}_{xx}) \\ A_U &= \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \omega p V \right) \left(\frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} - \omega p \bar{G}_{zx} \right) & A_V &= \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \omega p V \right) \left(\frac{\partial \bar{G}_{zx}}{\partial z} - \omega p \bar{G}_{xx} \right) \\ B_U &= \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \omega p U \right) \left(\frac{\partial \bar{G}_{zx}}{\partial z} + \omega p \bar{G}_{xx} \right) & B_V &= \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \omega p U \right) \left(\frac{\partial \bar{G}_{xx}}{\partial z} + \omega p \bar{G}_{zx} \right) \\ &+ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} + \omega^2 p^2 V \bar{G}_{xx} \right) & &+ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial \bar{G}_{zx}}{\partial z} + \omega^2 p^2 V \bar{G}_{xx} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

where the \bar{G}_{ij} 's represent the Green's functions of the plane-wave response of the layered medium, and

$$\begin{aligned} U &= U(z, \omega, p; z_s) & \bar{G}_{zz} &= \bar{G}_{zz}(z_R, \omega, p; z) & \bar{G}_{zx} &= \bar{G}_{zx}(z_R, \omega, p; z) \\ V &= V(z, \omega, p; z_s) & \bar{G}_{zx} &= \bar{G}_{zx}(z_R, \omega, p; z) & \bar{G}_{xx} &= \bar{G}_{xx}(z_R, \omega, p; z) \end{aligned} \quad (7)$$

The expressions above are easily transformed into the frequency ω and horizontal wavenumber k domain by making the change of variable $k = \omega p$. The Fréchet derivatives $R'_U, A'_U, B'_U, R'_V, A'_V, B'_V$ of U and V with respect to density ρ and P - and S -wave velocities α and β are obtained, as before, by using the Jacobian matrix \mathbf{J} , i.e.,

$$\begin{bmatrix} R'_U \\ A'_U \\ B'_U \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} R_U \\ A_U \\ B_U \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} R'_V \\ A'_V \\ B'_V \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} R_V \\ A_V \\ B_V \end{bmatrix} . \quad (8)$$

The displacement wavefield \mathbf{u} within the stratification can be recovered from the plane-wave reflectivity in the frequency-wavenumber domain by using a Fourier-Bessel transform. In the case of an explosive point source or a vertical point force corresponding to azimuthal order $m = 0$, the horizontal radial and vertical displacements at receiver R are written (see eq. A2):

$$\begin{aligned} u_x(x_R, z_R, t) &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ V(z_R, \omega, k) J_1(kx_R) \right\} \\ u_z(x_R, z_R, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ U(z_R, \omega, k) J_0(kx_R) \right\} . \end{aligned} \quad (9)$$

Similarly, the Fréchet derivatives of the displacement components with respect to the medium properties at a given depth z in the time-distance domain may be obtained via a Fourier-Bessel transform of the corresponding plane-wave sensitivity operators. However, this procedure requires an additional two-dimensional integration of the scatterer positions in the horizontal plane considered for the perturbation. Thus, for a slight modification of the P -wave velocity α at depth z , we can write

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x(x_R, z_R, t; z_S)}{\partial \alpha(z)} &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k A'_V(z_R, \omega, k; z_S | z) \left\{ \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta J_1(kd) e^{i\psi} \right\} \\ \frac{\partial u_z(x_R, z_R, t; z_S)}{\partial \alpha(z)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k A'_U(z_R, \omega, k; z_S | z) \left\{ \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta J_0(kd) \right\} , \end{aligned} \quad (10)$$

where $d = \sqrt{x_R^2 + r^2 - 2x_R r \cos\theta}$ is the horizontal distance between the receiver R and the point diffractor D (see Fig. B1). We show in Appendix B that the integrals

$$I_0 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta J_0(kd) \quad \text{and} \quad I_1 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta J_1(kd) e^{i\psi} \quad (11)$$

can be evaluated analytically and are respectively equal to

$$I_0 = \frac{2\pi}{k} J_0(kx_R) \quad \text{and} \quad I_1 = \frac{2\pi}{k} J_1(kx_R) . \quad (12)$$

Consequently, the Fréchet derivatives of the horizontal radial and vertical displacements of a layered medium in the time-distance domain are finally written as

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x(x_R, z_R, t; z_S)}{\partial \alpha(z)} &= - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk A'_V(z_R, \omega, k; z_S | z) J_1(kx_R) \\ \frac{\partial u_z(x_R, z_R, t; z_S)}{\partial \alpha(z)} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk A'_U(z_R, \omega, k; z_S | z) J_0(kx_R) . \end{aligned} \quad (13)$$

These expressions mainly consist in integrating the Fréchet derivatives obtained in the plane-wave domain, with the notable exception of the missing factor $2\pi/k$ which corresponds to the spatial integration of the point scatterers in the horizontal plane at depth z .

III.2 Numerical examples

The computational method introduced in the previous section is illustrated with the marine model depicted in Figure 7. A small perturbation was applied to the shear wave velocity profile at 1172 m depth. 40 synthetic seismograms were computed between 0 et 6 km offset. As before, we test our analytical formulation by comparing the differential seismograms with those obtained with a discrete perturbation in the medium properties. This time, however, the tests do not require any discussion on the discretization and aperture of the diffracting slab since our method fully accounts for the scattering effects of the entire plane of inhomogeneity. Figure 7 shows that the proposed formulation is very accurate at all receiver positions, with correlation coefficients greater than 99.0% everywhere. The differential seismograms include, in particular, strong head waves generated at major interfaces in the model.

The second example shows in more detail the waveforms computed with the two techniques for a complex seismic model involving 303 homogeneous layers and containing numerous low velocity zones (Fig. 2 of Dietrich and Kormendi, 1990). A perturbation in shear-wave

velocity was applied roughly in the middle of the model, at 890 m depth. Figure 8 displays the two seismic sections obtained in the range 0 to 6 km, as well as the seismic traces at 1.5 km offset together with an enlargement of these traces between 1.5 and 1.8 s. All data show that the differential seismograms are remarkably well computed with the formulation proposed in this paper.

IV. CONCLUSION

An understanding of elastic wave scattering by point scatterers and by plane diffractors is of prime importance for the detection of small spatial or temporal changes in subsurface properties. We have shown that the general formulae of the Fréchet derivatives obtained by Tarantola (1984) in the time-distance domain can be used to model the first-order diffraction effects produced by a thin slab embedded in a layered medium. These computations are achieved by summing the contributions of an ensemble of point scatterers. Furthermore, by noticing the analogy between these formulae and the Fréchet derivatives obtained by Dietrich and Kormendi (1990) for P - SV waves in the plane-wave domain, we have proposed a fast and accurate method for evaluating the first-order scattering effects generated by a plane inhomogeneity of infinite extent. This method should prove useful, in particular, for linearized inversions of limited aperture seismic data.

ACKNOWLEDGMENTS

Financial support for this work was provided by the French DGA through a research grant to F. Moinet and through a research contract from DCN-Toulon. The numerical applications were performed by using the computer facilities of the Grenoble Observatory.

APPENDIX A: THE GREEN'S FUNCTIONS AND THEIR DERIVATIVES

The analytical expression of the wave propagation solution in a stratified medium allows us to write the temporal and spatial derivatives of the displacement at the receiver in explicit form. The particle displacements in the time-distance domain are obtained by integrating the plane-wave response computed in the frequency-wavenumber domain for a given type of seismic excitation. In a cylindrical coordinate system (r, θ, z) with the vertical axis z perpendicular to the layering, the displacement components u_r, u_θ et u_z are written as a double integral over the angular frequencies ω and wavenumbers k , and as a discrete sum over the azimuthal orders m characterizing the seismic source (see, e.g., Kennett, 1983):

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \sum_m \left[V(m, z, \omega, k) \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} + W(m, z, \omega, k) \frac{im}{kr} J_m(kr) \right] e^{im\theta} \\ u_\theta(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \sum_m \left[V(m, z, \omega, k) \frac{im}{kr} J_m(kr) - W(m, z, \omega, k) \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} \right] e^{im\theta} \quad (A1) \\ u_z(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \sum_m U(m, z, \omega, k) J_m(kr) e^{im\theta} \end{aligned}$$

$J_m(\xi)$ is the Bessel function of first kind and order m . U , V and W respectively denote the vertical and horizontal components of the P - SV displacement, and the SH displacement in the plane-wave domain. In the following, we shall restrict ourselves to seismic motions generated by explosive point sources or by point forces, which are described by azimuthal orders $m = 0, \pm 1$ only.

Using the relationships

$$\frac{dJ_0(kr)}{d(kr)} = -J_1(kr) \quad ; \quad \frac{dJ_1(kr)}{d(kr)} = -\frac{dJ_{-1}(kr)}{d(kr)} = J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} ,$$

and introducing the notations

$$\text{Jinc}(\xi) = \frac{J_1(\xi)}{\xi} ; \text{Jinc}(0) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad H(z, \omega, k) = V(z, \omega, k) - iW(z, \omega, k) ,$$

we obtain

- for azimuthal order $m = 0$ (explosion E , vertical force Fz)

$$\begin{aligned} u_r^{E,Fz}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ -V^{E,Fz}(z, \omega, k) J_1(kr) \right\} \\ u_\theta^{E,Fz}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ W^{E,Fz}(z, \omega, k) J_1(kr) \right\} = 0 \\ u_z^{E,Fz}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ U^{E,Fz}(z, \omega, k) J_0(kr) \right\} \end{aligned} \quad (A2)$$

- for azimuthal orders $m = \pm 1$

$$\begin{aligned} u_r^{Fx}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2 \left[V^{Fx+}(z, \omega, k) J_0(kr) - H^{Fx+}(z, \omega, k) \text{Jinc}(kr) \right] \cos \theta \right\} \\ u_\theta^{Fx}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2i \left[-W^{Fx+} J_0(kr) + iH^{Fx+}(z, \omega, k) \text{Jinc}(kr) \right] \sin \theta \right\} \\ u_z^{Fx}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2 U^{Fx+} J_1(kr) \cos \theta \right\} \end{aligned} \quad (A3)$$

for a horizontal force Fx , and

$$\begin{aligned} u_r^{Fy}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2i \left[V^{Fy+}(z, \omega, k) J_0(kr) - H^{Fy+}(z, \omega, k) \text{Jinc}(kr) \right] \sin \theta \right\} \\ u_\theta^{Fy}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2 \left[-W^{Fy+} J_0(kr) + iH^{Fy+}(z, \omega, k) \text{Jinc}(kr) \right] \cos \theta \right\} \\ u_z^{Fy}(r, \theta, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dk k \left\{ 2i U^{Fy+} J_1(kr) \sin \theta \right\} \end{aligned} \quad (A4)$$

for a horizontal force Fy .

The above expressions may be transformed into a cartesian coordinate system (x, y, z) by using the classical rotation formulae for the horizontal components of displacement, i.e.,

$$\begin{aligned} u_x(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t) \cos \theta - u_\theta(r, \theta, z, t) \sin \theta \\ u_y(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z, t) &= u_r(r, \theta, z, t) \sin \theta + u_\theta(r, \theta, z, t) \cos \theta \end{aligned} \quad (A5)$$

The z -component is not affected by the change of coordinates.

The Green's functions for a source at location \mathbf{x}_S and a receiver at location \mathbf{x}_R are finally defined in cartesian coordinates by

$$G_{ij}(\mathbf{x}_R, t; \mathbf{x}_S) = u_i^{Fj}(x, y, z, t) \quad (A6)$$

where i and j represent the x, y and z coordinates.

The time derivatives of u_x, u_y and u_z are computed by merely multiplying the spectral displacements by $-i\omega$ before computing the inverse Fourier transform. The spatial derivatives of the displacement components require more algebra. The derivatives of u_ξ ($\xi = x$ or y) with respect to the x and y coordinates of the receiver are obtained via the chain rule

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\xi}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial u_\xi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u_\xi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_\xi}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial u_\xi}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u_\xi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (A7)$$

and by differentiating the Bessel and trigonometric functions with respect to r and θ in the u_ξ expressions. These computations are straightforward and are not presented here.

The computation of the vertical derivatives of u_r, u_θ and u_z reduces to the computation of $\partial U(z, \omega, k)/\partial z$, $\partial V(z, \omega, k)/\partial z$ and $\partial W(z, \omega, k)/\partial z$. These derivatives are obtained by differentiating the generalized reflection and transmission matrices appearing in the global response of the stratified medium. Thus, using the notations of Kennett (1983), the plane-wave P - SV displacement is written as

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \left(\mathbf{M}_D^R + \mathbf{M}_U^R \mathbf{R}_D^{RL} \right) \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{RS} \mathbf{R}_D^{RL} \right]^{-1} \mathbf{T}_D^{RS} \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{FS} \mathbf{R}_D^{SL} \right]^{-1} (\Sigma_D - \mathbf{R}_U^{FS} \Sigma_U) \quad (A8)$$

for a receiver below the source, and

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \left(\mathbf{M}_U^R + \mathbf{M}_D^R \mathbf{R}_U^{FR} \right) \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{RS} \mathbf{R}_U^{FR} \right]^{-1} \mathbf{T}_U^{RS} \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{SL} \mathbf{R}_U^{FS} \right]^{-1} (\mathbf{R}_D^{SL} \Sigma_D - \Sigma_U) \quad (A9)$$

for a receiver above the source. The SH displacement W has similar expressions, with the matrices replaced by scalar terms. We can then show that the vertical gradient is given by

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \left(-\mathbf{M}_D^R \mathbf{D} + \mathbf{M}_U^R \mathbf{D} \mathbf{R}_D^{RL} \right) \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{RS} \mathbf{R}_D^{RL} \right]^{-1} \mathbf{T}_D^{RS} \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_U^{FS} \mathbf{R}_D^{SL} \right]^{-1} (\Sigma_D - \mathbf{R}_U^{FS} \Sigma_U) \quad (A10)$$

in the case of a receiver below the source, and by

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \left(\mathbf{M}_U^R \mathbf{D} - \mathbf{M}_D^R \mathbf{D} \mathbf{R}_U^{FR} \right) \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{RS} \mathbf{R}_U^{FR} \right]^{-1} \mathbf{T}_U^{RS} \left[\mathbf{I} - \mathbf{R}_D^{SL} \mathbf{R}_U^{FS} \right]^{-1} (\mathbf{R}_D^{SL} \Sigma_D - \Sigma_U) \quad (A11)$$

in the case of a receiver above the source. The demonstration of these formulae is similar to the derivation of the vertical gradient of the displacement with respect to the source depth, presented in Dietrich and Kormendi (1990).

In the P - SV case, the matrix \mathbf{D} appearing in (A10) and (A11) is defined as $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} i\nu_R & 0 \\ 0 & i\gamma_R \end{bmatrix}$, where ν_R and γ_R are the vertical wavenumbers for P - and S -waves in the layer containing the receiver. In the SH case, $D = i\gamma_R$. Equations (A10) and (A11) show that the vertical gradient of the displacement involves only slight modifications of the original expressions of U , V and W .

APPENDIX B: INTEGRATION OF BESSEL FUNCTIONS

The double integrals over radial distance r and azimuth θ

$$I_0 = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta J_0(kd) \quad \text{and} \quad I_1 = \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\theta J_1(kd) e^{i\psi} \quad (\text{B1})$$

can be exactly evaluated by using expansions in products of Bessel functions. Referring to the notations defined in figure B1, where $d = \sqrt{x_R^2 + r^2 - 2x_R r \cos\theta}$, a Bessel function J of the first kind and order ν can be written as (see e.g. Gradshteyn & Ryzhik, 1965, p. 979):

$$e^{i\psi} J_\nu(kd) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) J_{\nu+m}(kx_R) e^{im\theta}. \quad (\text{B2})$$

Thus, when $\nu = 0$ the above expression becomes

$$\begin{aligned} J_0(kd) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) J_m(kx_R) e^{im\theta} \\ &= J_0(kr) J_0(kx_R) + \sum_{m=1}^{\infty} J_{-m}(kr) J_{-m}(kx_R) e^{-im\theta} + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) J_m(kx_R) e^{im\theta}, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

and since $J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z)$ for any integer m , we obtain

$$J_0(kd) = J_0(kr) J_0(kx_R) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr) J_m(kx_R) \cos m\theta. \quad (\text{B4})$$

Similarly, when $\nu=1$, we can write

$$\begin{aligned} e^{i\psi} J_1(kd) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr) J_{m+1}(kx_R) e^{im\theta} \\ &= J_0(kr) J_1(kx_R) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ J_m(kr) J_{m+1}(kx_R) e^{im\theta} - J_m(kr) J_{m-1}(kx_R) e^{-im\theta} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

We can now use equations (B4) and (B5) to evaluate the integrals

$$\begin{aligned} K_0 &= \int_0^{2\pi} d\theta J_0(kd) = \left\{ J_0(kr) J_0(kx_R) \int_0^{2\pi} d\theta \right\} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ J_m(kr) J_m(kx_R) \int_0^{2\pi} d\theta \cos m\theta \right\} \\ &= 2\pi J_0(kr) J_0(kx_R) \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

and

$$K_1 = \int_0^{2\pi} d\theta J_1(kd) e^{i\psi} = \left\{ J_0(kr) J_1(kx_R) \int_0^{2\pi} d\theta \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ J_m(kr) J_{m+1}(kx_R) \int_0^{2\pi} d\theta e^{im\theta} \right\} - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ J_m(kr) J_{m-1}(kx_R) \int_0^{2\pi} d\theta e^{-im\theta} \right\} \quad (B7)$$

$$= 2\pi J_0(kr) J_1(kx_R).$$

The last step of the demonstration uses the property (Gradshteyn & Ryzhik, 1965, p.665)

$$\int_0^{\infty} dz J_0(\lambda z) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \lambda \neq 0 \quad (B8)$$

Consequently,

$$I_0 = \int_0^{\infty} dr K_0 = 2\pi J_0(kx_R) \int_0^{\infty} dr J_0(kr) = \frac{2\pi}{k} J_0(kx_R) \quad (B9)$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} dr K_1 = 2\pi J_1(kx_R) \int_0^{\infty} dr J_0(kr) = \frac{2\pi}{k} J_1(kx_R) \quad (B10)$$

REFERENCES

- Amundsen, L and Ursin, B. (1991). Frequency-wavenumber inversion of acoustic data, *Geophysics*, **56**, 1027–1039.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**, 959–971.
- Dietrich, M. and Kormendi, F. (1990). Perturbation of the plane-wave reflectivity of a depth-dependent elastic medium by weak inhomogeneities, *Geophys. J. Int.*, **100**, 203–214.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1980). *Table of integrals, series, and products*, Academic Press.
- Kennett, B.L.N. (1983). *Seismic wave propagation in stratified media*, Cambridge University Press.
- Knapp, R.W. (1991). Fresnel zones in the light of broadband data, *Geophysics*, **56**, 354–359.
- Kormendi, F. and Dietrich, M. (1991). Nonlinear waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified elastic media, *Geophysics*, **56**, 664–674.
- McAuley, A.D. (1985). Prestack inversion with plane-layer point source modeling, *Geophysics*, **50**, 77–89.
- Mora, P. (1987). Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data, *Geophysics*, **52**, 1211–1228.
- Pan, G.S., Phinney, R.A. and Odom, R.I. (1988). Full-waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified acoustic media, Theory and feasibility, *Geophysics*, **53**, 21–31.
- Sheriff, R.E. (1980). Nomogram for Fresnel-zone calculation: *Geophysics*, **45**, 968–972.
- Spudich, P. and Iida, M. (1993). The seismic coda, site effects, and scattering in alluvial basins studied using aftershocks of the 1986 North Palm Springs, California, earthquake as source arrays, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **83**, 1721–1743.

Tarantola, A. (1984). Inverse problems of acoustic and elastic waves, *in* Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves, pp. 104-181, Santosa, F., Pao, Y.-H., Symes, W.W. and Holland, C., Eds., SIAM, Philadelphia.

Trorey, A.W. (1970). A simple theory for seismic diffractions, *Geophysics*, **35**, 762-784.

Zeng, Y. and Anderson, J.G. (1995). A method for direct computation of the differential seismogram with respect to the velocity change in a layered elastic solid, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **85**, 300-307.

Zhao, H., Ursin, B. and Amundsen, L. (1994). Frequency-wavenumber elastic inversion of marine seismic data, *Geophysics*, **59**, 1868-1881.

LGIT, CNRS & Université Joseph Fourier

BP 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

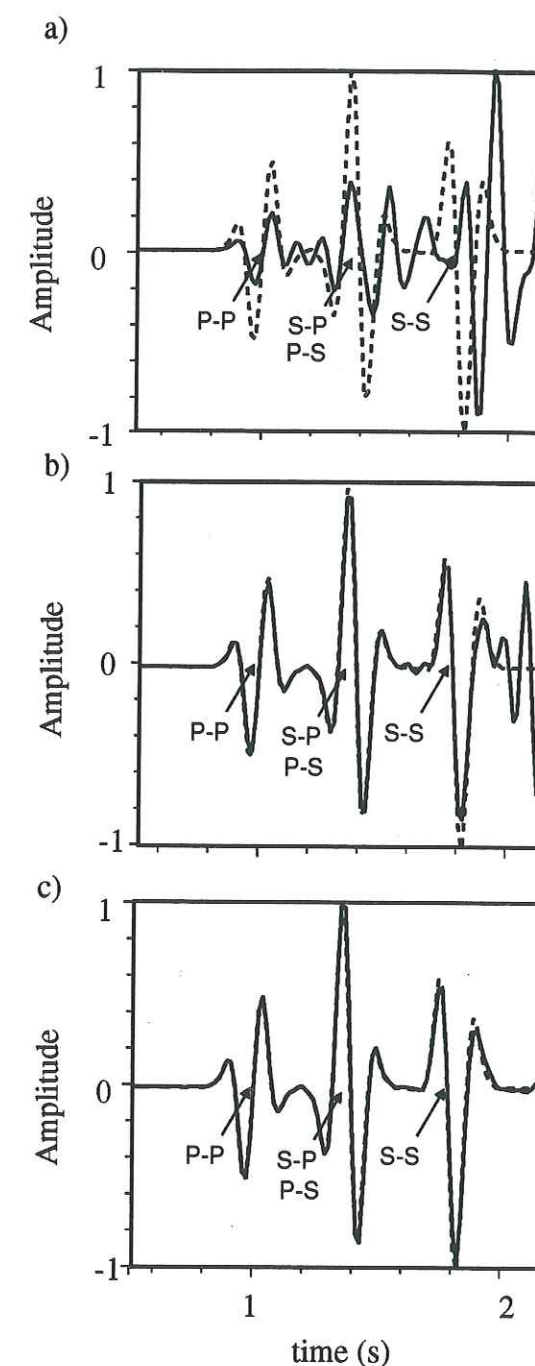


Fig1

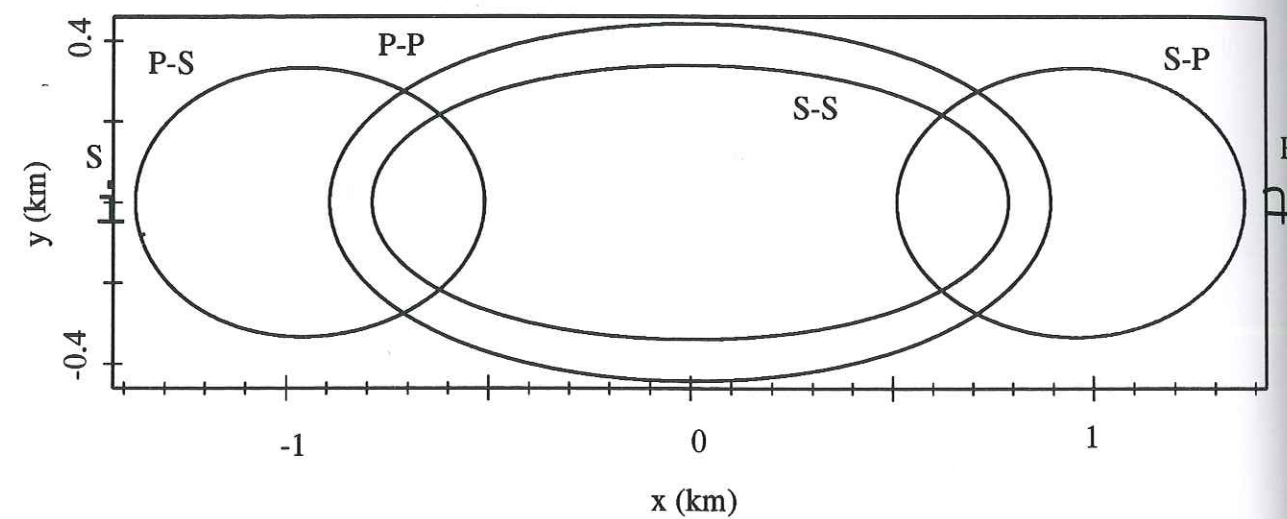


Fig 2

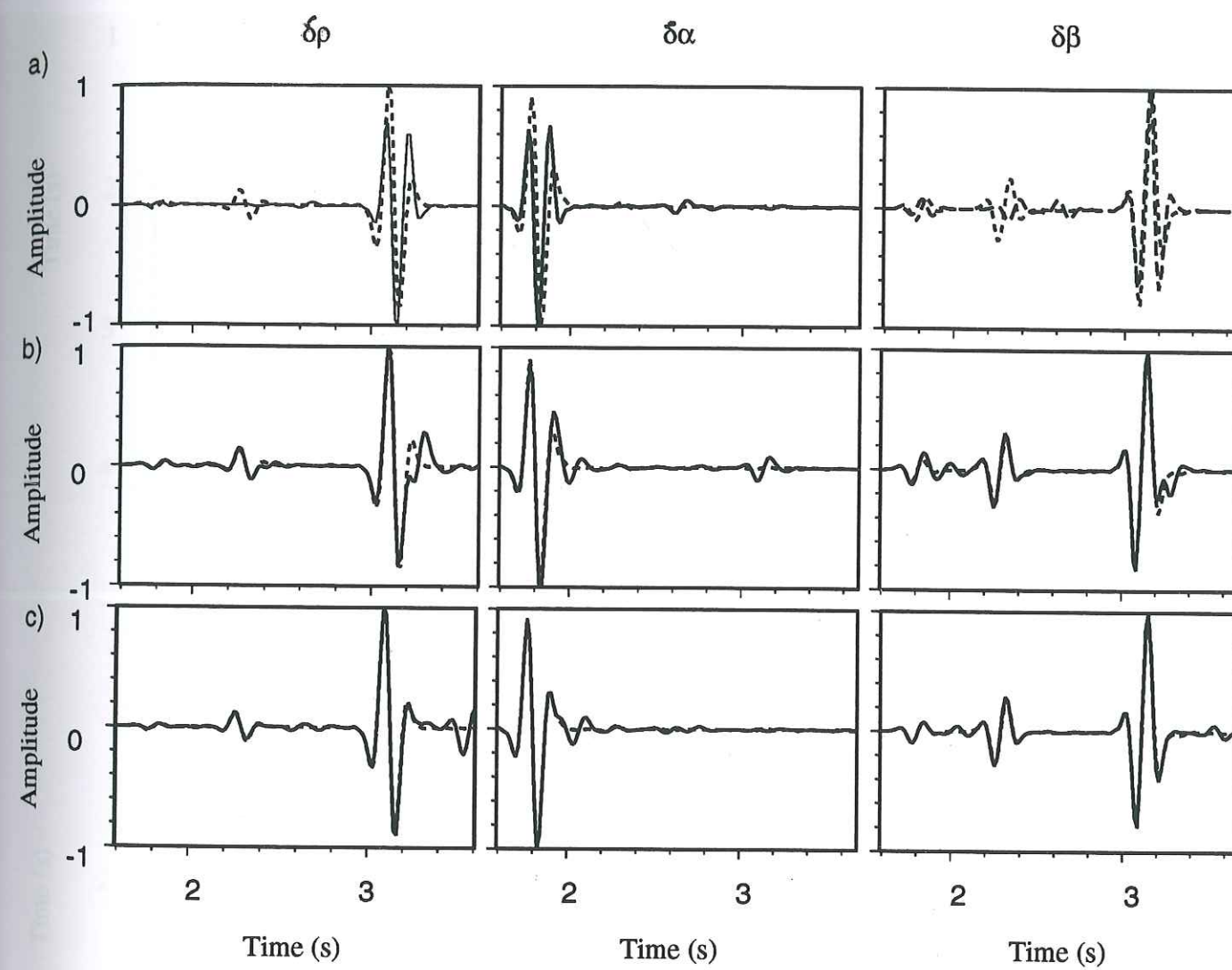


Fig 3

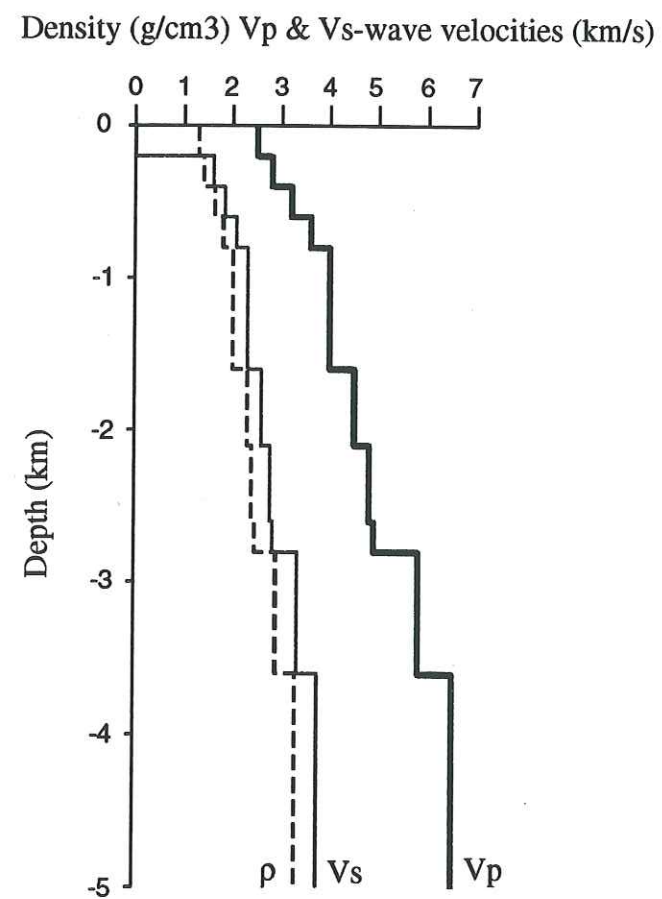


Fig 4

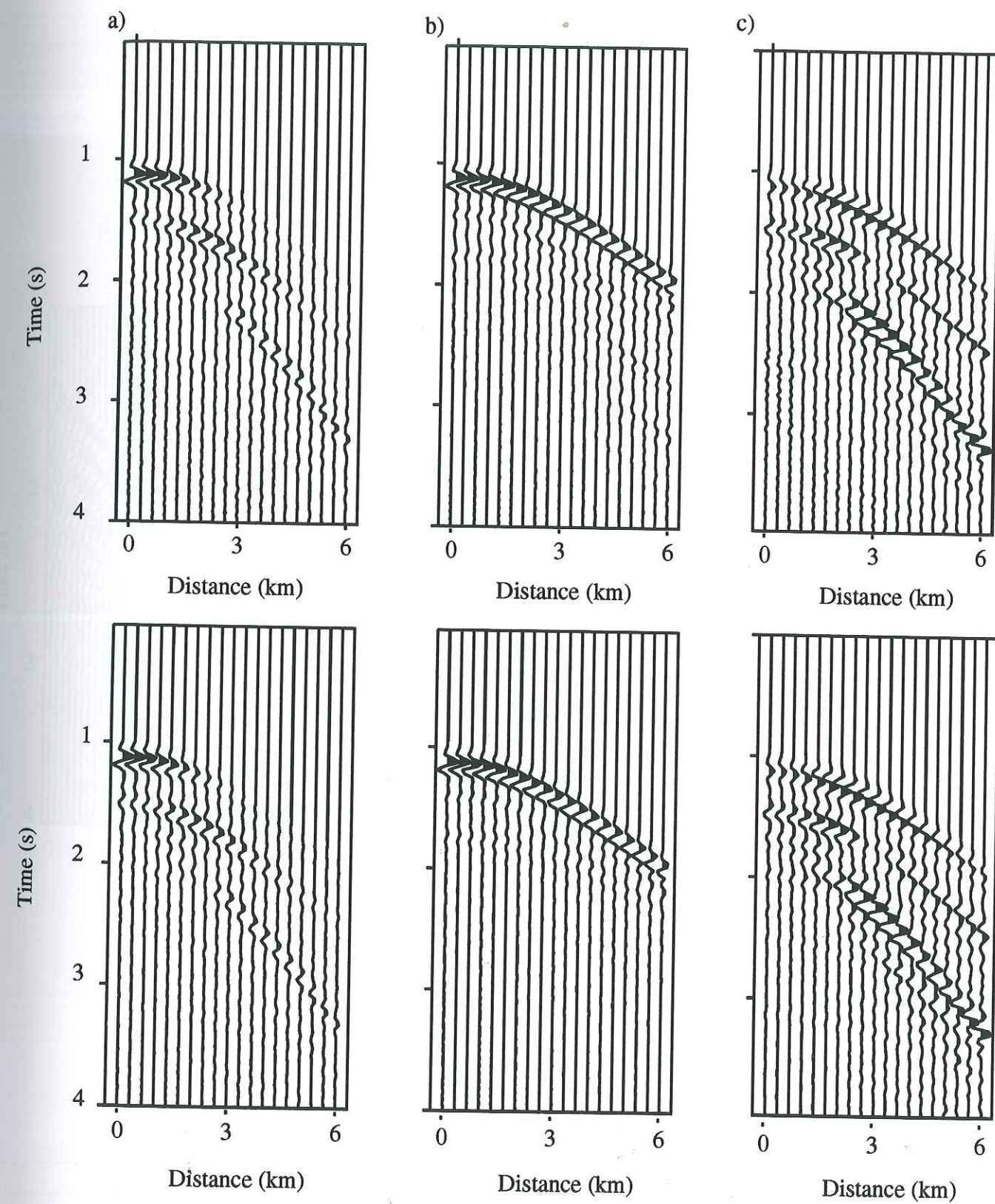


Fig 5

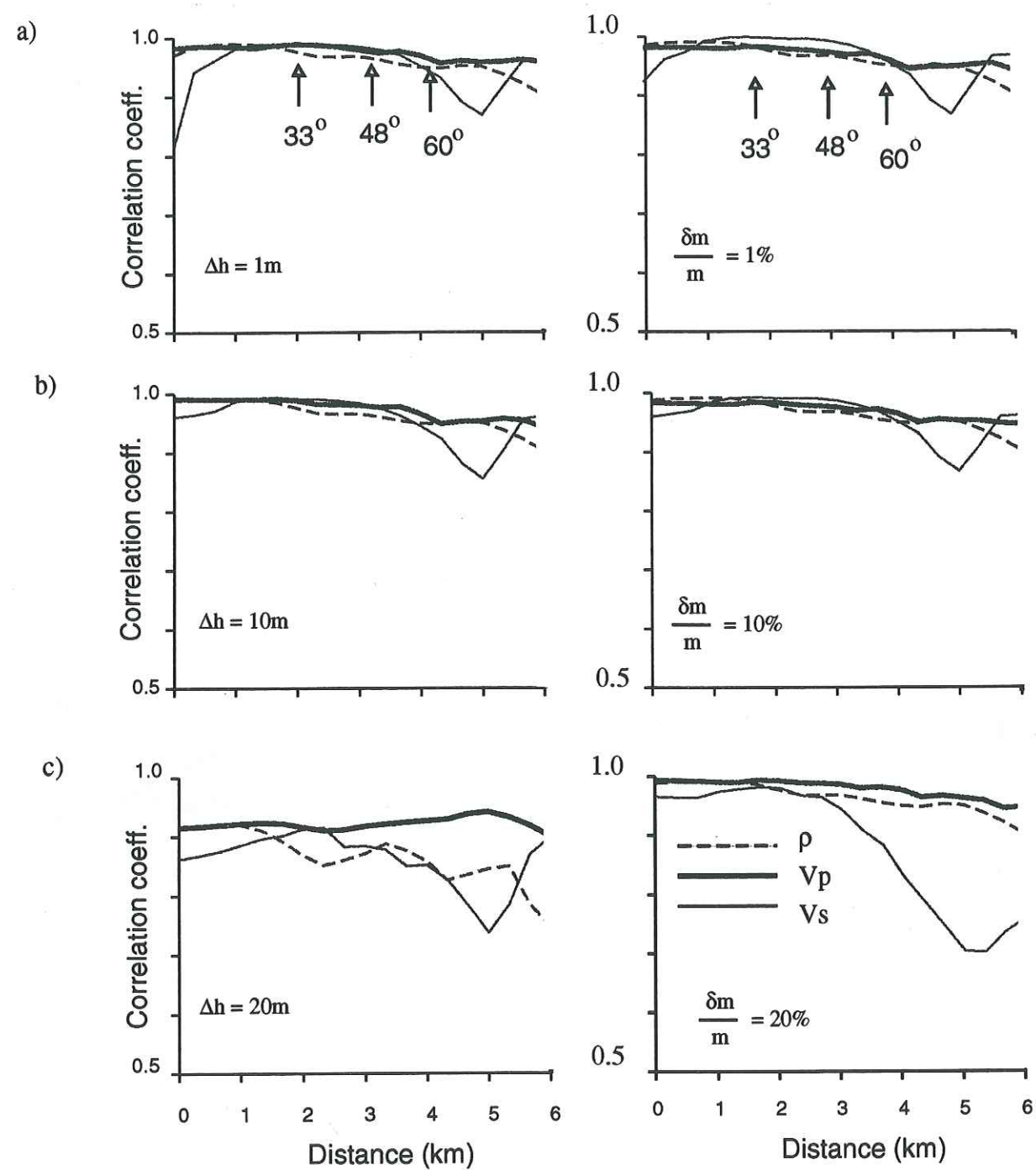


Fig 6

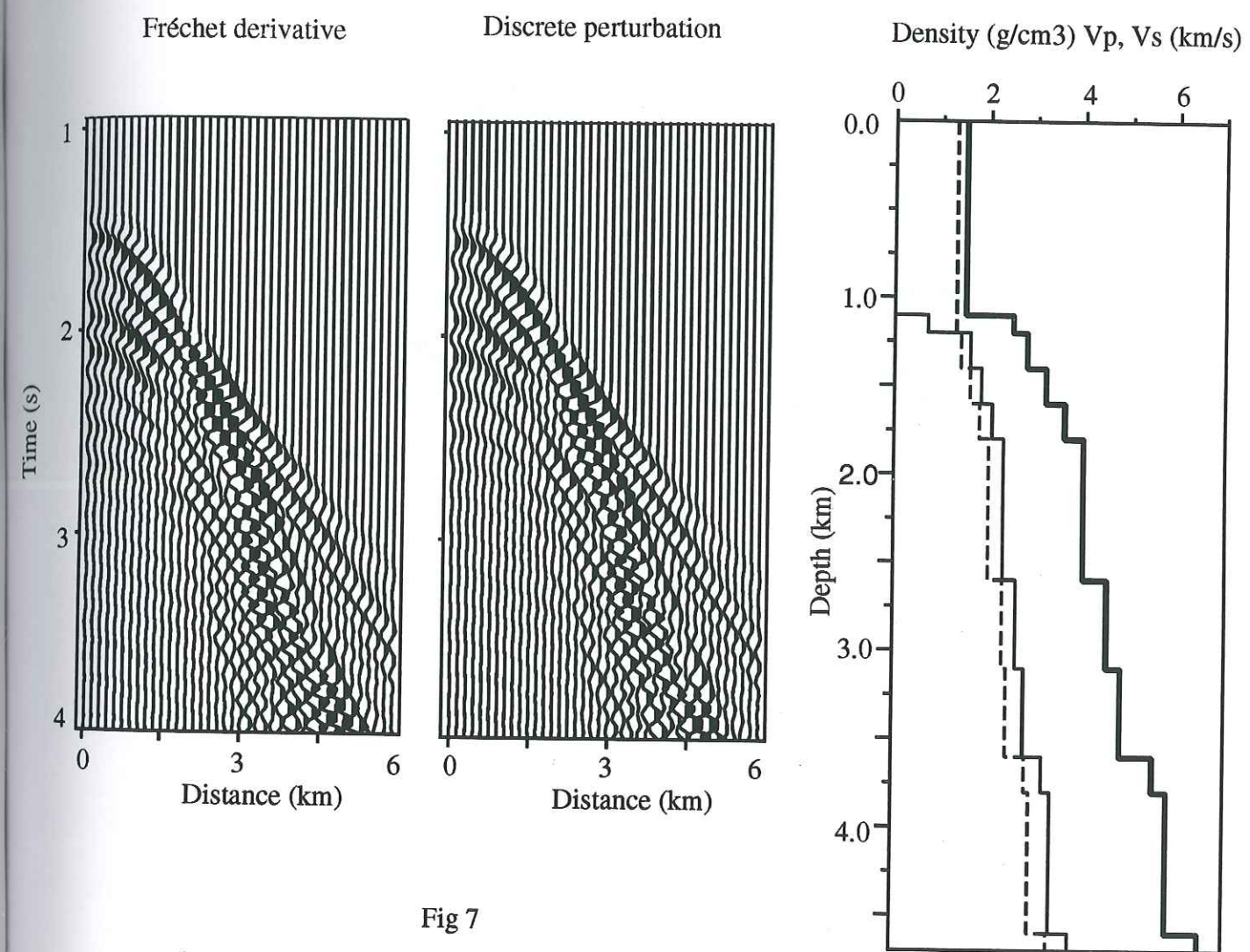


Fig 7

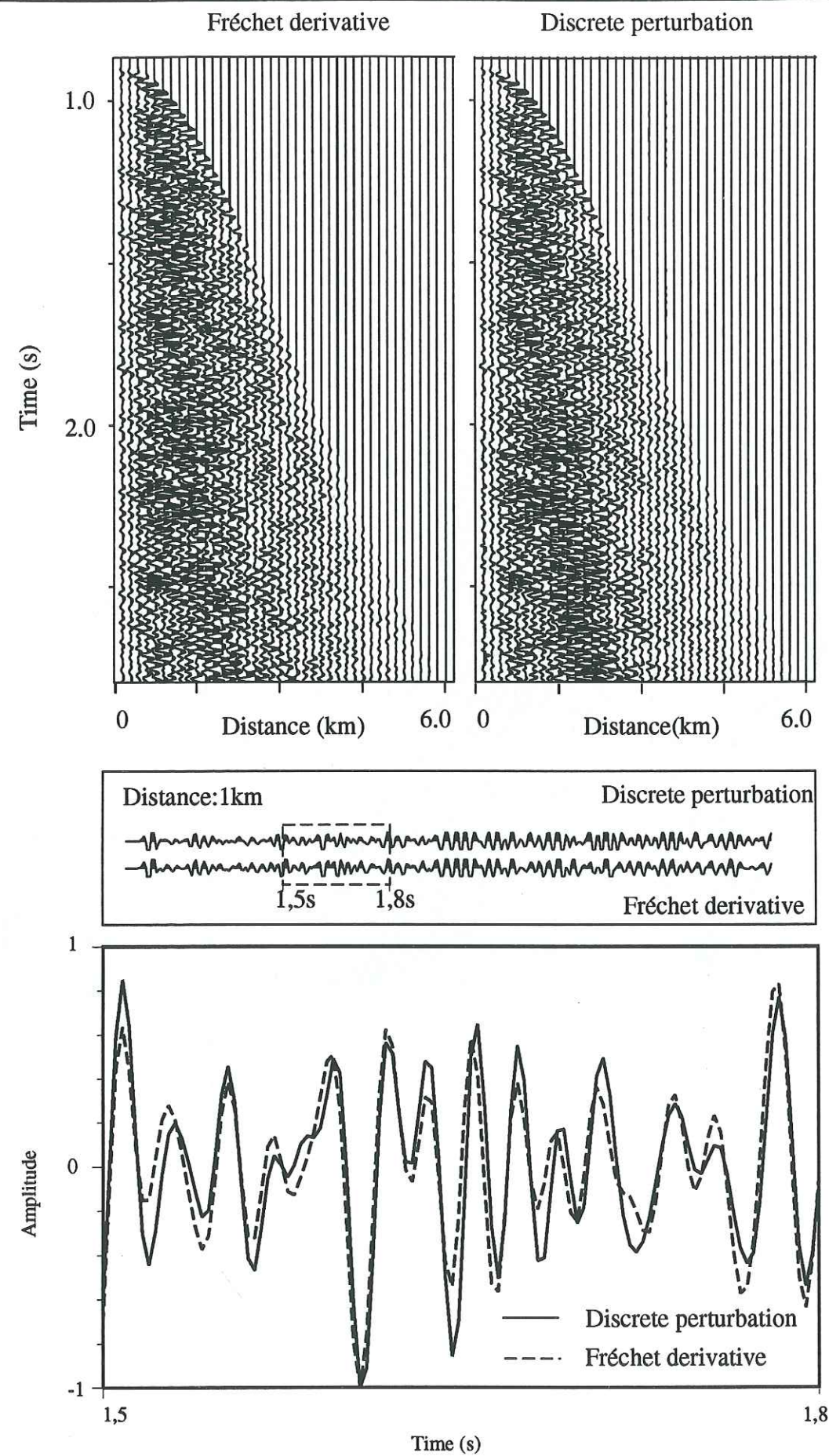


Fig. 8

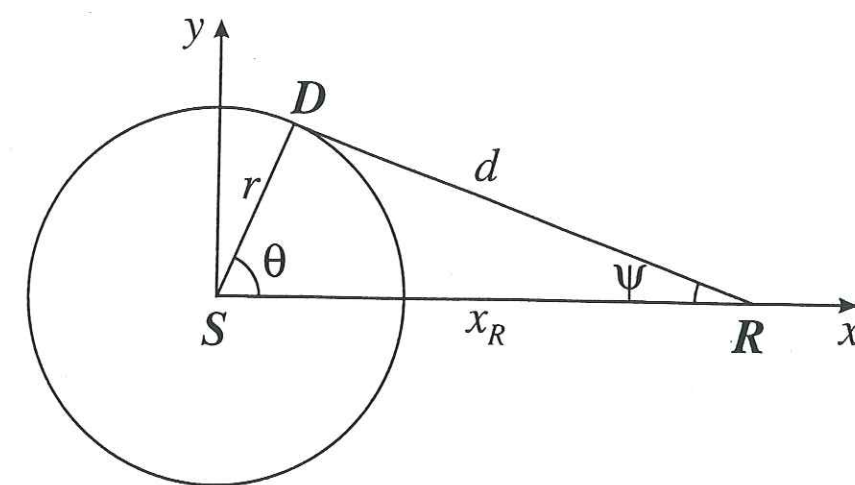


Fig. B1

FIGURE CAPTIONS

Figure 1: Comparison of the vertical components of the differential seismograms obtained with the Fréchet derivative method (solid line) and with the discrete perturbation method (dashed line), for a perturbation in shear wave velocity at 2 km depth. a) 2 scatterers per wavelength; b) 4 scatterers per wavelength; c) 6 scatterers per wavelength.

Figure 2: First Fresnel zones for PP, PS, SP and SS reflections at 1 km depth in a medium with velocity gradients $V_p(z) = 1.5 + z$ km/s and $V_s(z) = 0.86 + 0.6z$ km/s. Offset between source S and receiver R is 3 km.

Figure 3: Comparison between the vertical components of the differential seismograms obtained with the Fréchet derivative method (solid line) and with the discrete perturbation method (dashed line), for perturbations in density (left), P -wave velocity (middle), and S -wave velocity (right) at 1 km depth. Point diffractors are distributed over rectangular zones of (a) 1×0.5 km²; (b) 3×1 km²; and (c) 4×1.5 km² centered around the source - receiver midpoint. Case (b) corresponds to the rectangular area depicted in Figure 2. This area approximatively represents the envelope of the first Fresnel zones for PP, PS, SP and SS reflections.

Figure 4: 10-layer elastic model used for testing the robustness of the Fréchet derivative approach.

Figure 5: Differential seismograms computed for the model shown in Figure 4 with the Fréchet derivative approach (top) and with the discrete perturbation technique (bottom). (a) perturbation in density; (b) perturbation in P -wave velocity; (c) perturbation in S -wave velocity.

Figure 6: Correlation coefficients between the seismograms obtained with the two methods as a function of source-receiver offset. The left hand side panels display the results obtained by varying the thickness of the perturbed layer: a) 1 meter; b) 20 meters; c) 50 meters. The right hand side panels show the results obtained by varying the relative amplitude of the parameter perturbation: a) 1%; b) 10%; c) 20%.

Figure 7: Comparison of the seismic sections obtained with the Fréchet derivative and with the discrete perturbation techniques for the 11-layer elastic model presented on the right. A perturbation in shear wave velocity is applied at 1172 m depth.

Figure 8: Comparison of the seismic sections obtained with the Fréchet derivative approach (top left) and with the discrete perturbation technique (top right) for a 303-layer model. A perturbation in shear wave velocity is applied at 890 m depth. Details of the seismograms at 1.5 km offset are shown in the middle and bottom panels.

Figure B1: Integration over scatterer positions in the horizontal plane: S denotes the source, R the receiver, and D the diffractor. A two-dimensional integration is carried out with respect to radial distance r and azimuth θ .

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail: pialoux@ujf-grenoble.fr

B. Extensions à des forces horizontales.

Les codes de calculs des dérivées de Fréchet ont été validés en comparant la sensibilité au premier ordre des champs d'ondes obtenus par les deux méthodes analytiques présentées dans l'article avec une représentation numérique en différence finie des dérivées de Fréchet.

Ces calculs ont été limités à une source explosive et une force verticale (ordre azimutal $m=0$). Dans ce paragraphe, le calcul des dérivées de Fréchet est à présent testé pour les trois types de forces F_x , F_y et F_z .

Nous avons pris le modèle élastique de la figure 4 de l'article, et disposé des points diffractants à 2 km de profondeur en respectant la limite de 6 points par longueur d'onde. La source et le récepteur sont placés respectivement aux points $S(0,0,0)$ et $R(3,0,0)$ dans un repère cartésien. Pour chaque type de force ponctuelle F_x , F_y , F_z , nous déterminons les composantes ΔU_x , ΔU_y , ΔU_z du déplacement pour une perturbation de la vitesse des ondes S . Le signal temporel utilisé est un signal de Ricker de fréquence dominante 5 Hertz. Nous comparons sur la figure 9 les résultats obtenus par la méthode des dérivées de Fréchet (points diffractants), et la méthode des perturbations discrètes. La bonne corrélation des signaux valide la formulation quelle que soit la direction de la force ponctuelle. Les différences entre les sismogrammes qui figurent en traits pointillés, et les sismogrammes qui figurent en trait plein correspondent aux effets de bords de la zone de Fresnel. Ils ont une énergie importante par rapport au reste du signal lorsque la source et le déplacement sont selon la direction de l'axe des ordonnées du repère.

Cette figure présente par ailleurs les neuf composantes des sismogrammes différentiels F_{ij} en fonction du temps de propagation et pour une perturbation de la vitesse des ondes S , F_{ij} étant défini par:

$$F_{ij}(\mathbf{x}_S, 0, \mathbf{x}_R, t) = \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{x}_S, 0, \mathbf{x}_R, t) * S(t)}{\partial V_S} \quad (3.34)$$

Une intégration des effets des points diffractants donne deux composantes, d'une part les réflexions primaires et d'autre part les effets de bords dus à la limitation de la sommation (Torey, 1970). Lorsque la zone correspond à la première zone de Fresnel du réflecteur l'intégration mène à une séparation des deux composantes (cf article).

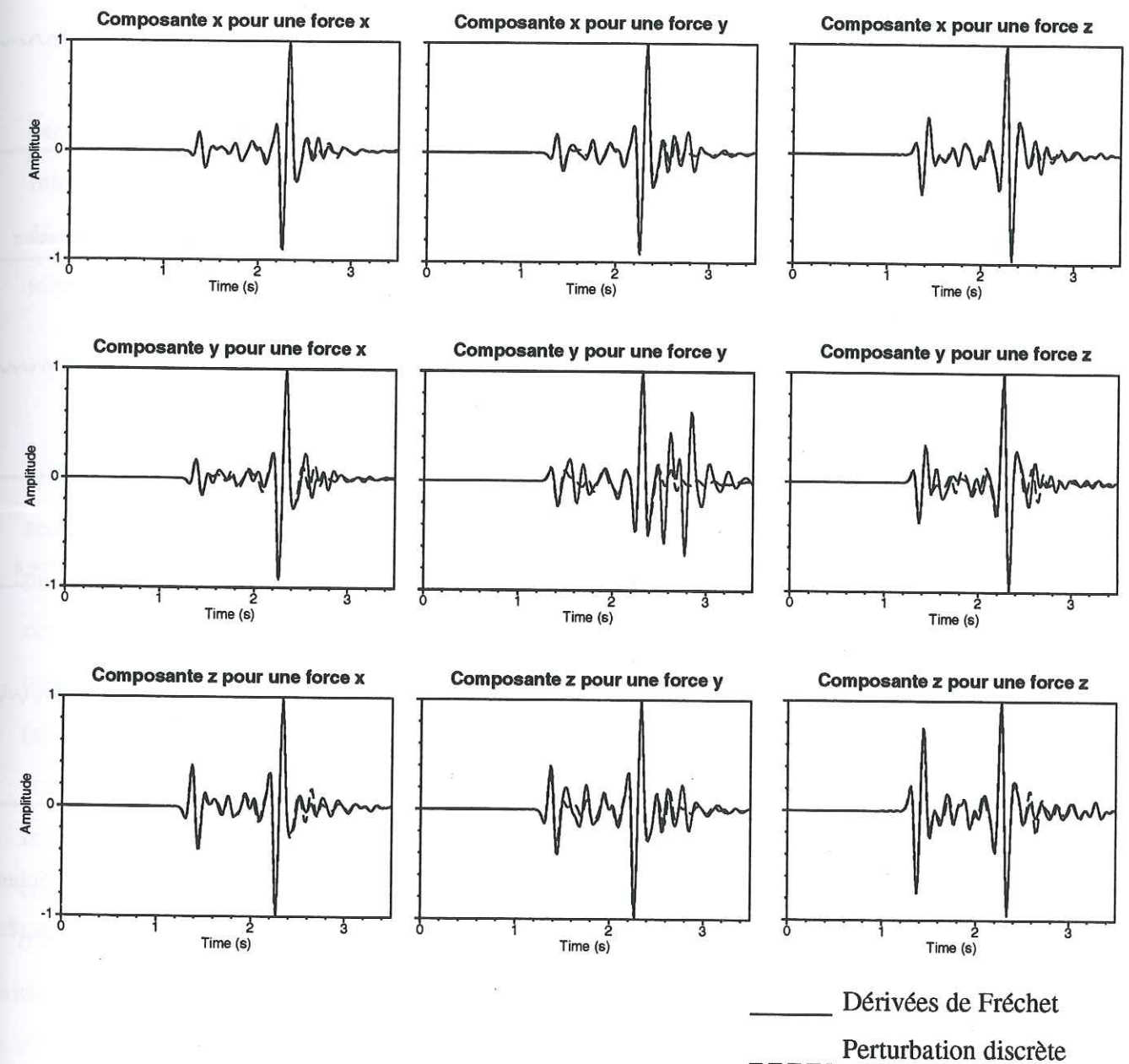


Fig 9: La source et le récepteur sont en $S(0,0,0)$ $R(3,0,0.5)$. On représente les composantes du déplacements suivant les trois directions de l'espace δu_x , δu_y , δu_z , pour des forces ponctuelles (F_x , F_y , F_z)

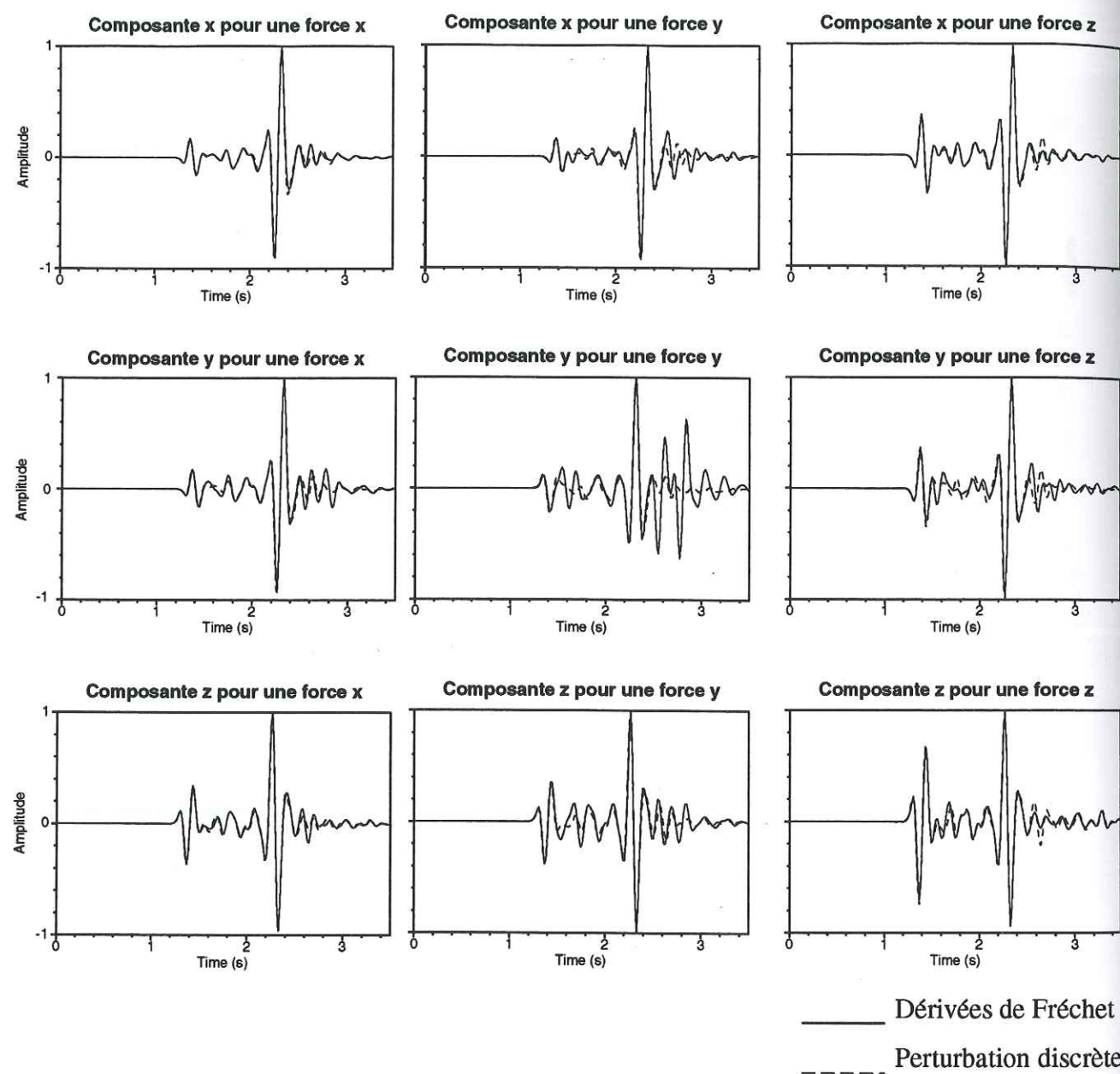


Fig 10: La source et le récepteur ont les coordonnées $S(3,0,0.5)$ $R(0,0,0)$ On représente les composantes du déplacements suivant les trois directions de l'espace $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$, cela pour des forces ponctuelles (F_x, F_y, F_z)

ces calculs ont pour but de vérifier le théorème de réciprocité pour la dérivée de la fonction de Green par rapport à la vitesse des ondes S:

$$\frac{\partial G_{ji}(\mathbf{x}_s, 0; \mathbf{x}_r, t) * s(t)}{\partial V_s} = \frac{\partial G_{ij}(\mathbf{x}_r, 0; \mathbf{x}_s, t) * s(t)}{\partial V_s} \quad (3.35)$$

Nous avons considéré dans cette étude deux géométries symétriques concernant les positions source-récepteurs (cf chapitre 2). La figure 10 montre les déplacements obtenus en intervertissant les positions de la source et du récepteur. La comparaison des deux figures 9 et 10 prouve que le théorème de réciprocité est vérifié. En effet, les termes diagonaux sont identiques et les termes non diagonaux sont symétriques par rapport à ceux de la figure 9.

C. Effet d'une couche mince

Pour le modèle présenté sur la figure 4 de l'article, les sismogrammes calculés par la méthode des dérivées de Fréchet et la méthode des perturbations discrètes sont très semblables. Nous incluons dans ce modèle une zone à faible vitesse à 2750 mètres de profondeur de 225 mètres d'épaisseur. Nous représentons sur la figure 11 la variation du coefficient de corrélation entre les traces obtenues par la méthode des dérivées de Fréchet et la méthode des différences finies en fonction de la position des récepteurs, pour les deux modèles (avec et sans couche à moindre vitesse). Les résultats pour le modèle avec couche à faible vitesse se détériorent considérablement par rapport à ce que l'on observe pour le modèle sans zone à faible vitesse pour les distances source-récepteurs importantes. Ils restent néanmoins corrects pour les distances inférieures à 3 km, ce qui correspond à notre limite tolérable de 35° d'incidence précisée dans l'article.

La figure 12 présente plus précisément les différences en forme d'onde des sismogrammes obtenus par la méthode des dérivées de Fréchet et ceux obtenus par la méthode de perturbation discrète. Les sismogrammes sont obtenus pour le modèle défini sur la figure 11b, en perturbant la vitesse des ondes S. On note, pour les incidences élevées, une détérioration des signaux calculés avec les dérivées de Fréchet, mais uniquement pour les arrivées tardives au-delà de 2.5 s qui sont probablement associées à des ondes guidées dans la

zone à moindre vitesse. Ces calculs soulignent une fois encore les limitations de l'approximation de Born qui ne considère que les phénomènes de diffractions simples.

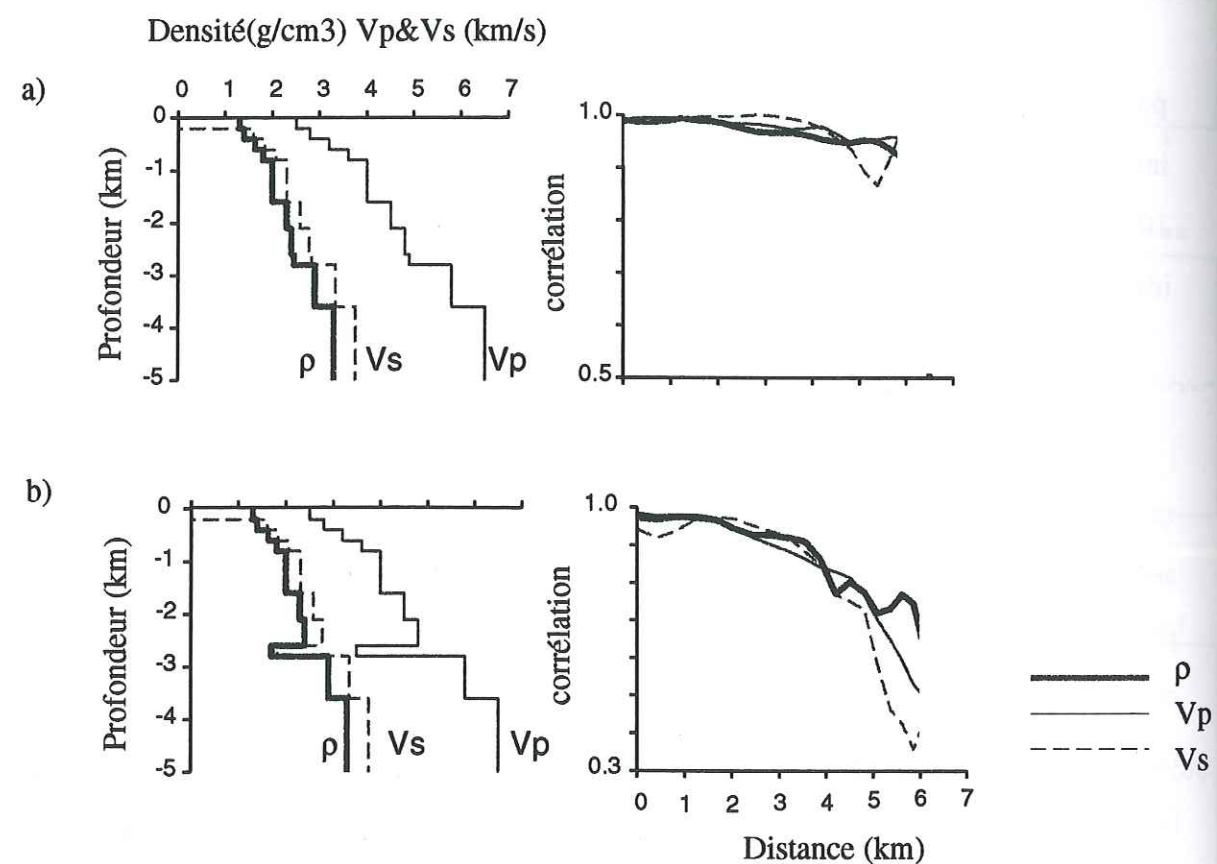


Fig 11 : Effet d'une zone à faible vitesse sur la variation du coefficient de corrélation des signaux obtenus par la méthode des dérivées de Fréchet et la méthode des perturbations discrètes en fonction de la distance source récepteur et pour les deux modèles a) et b)

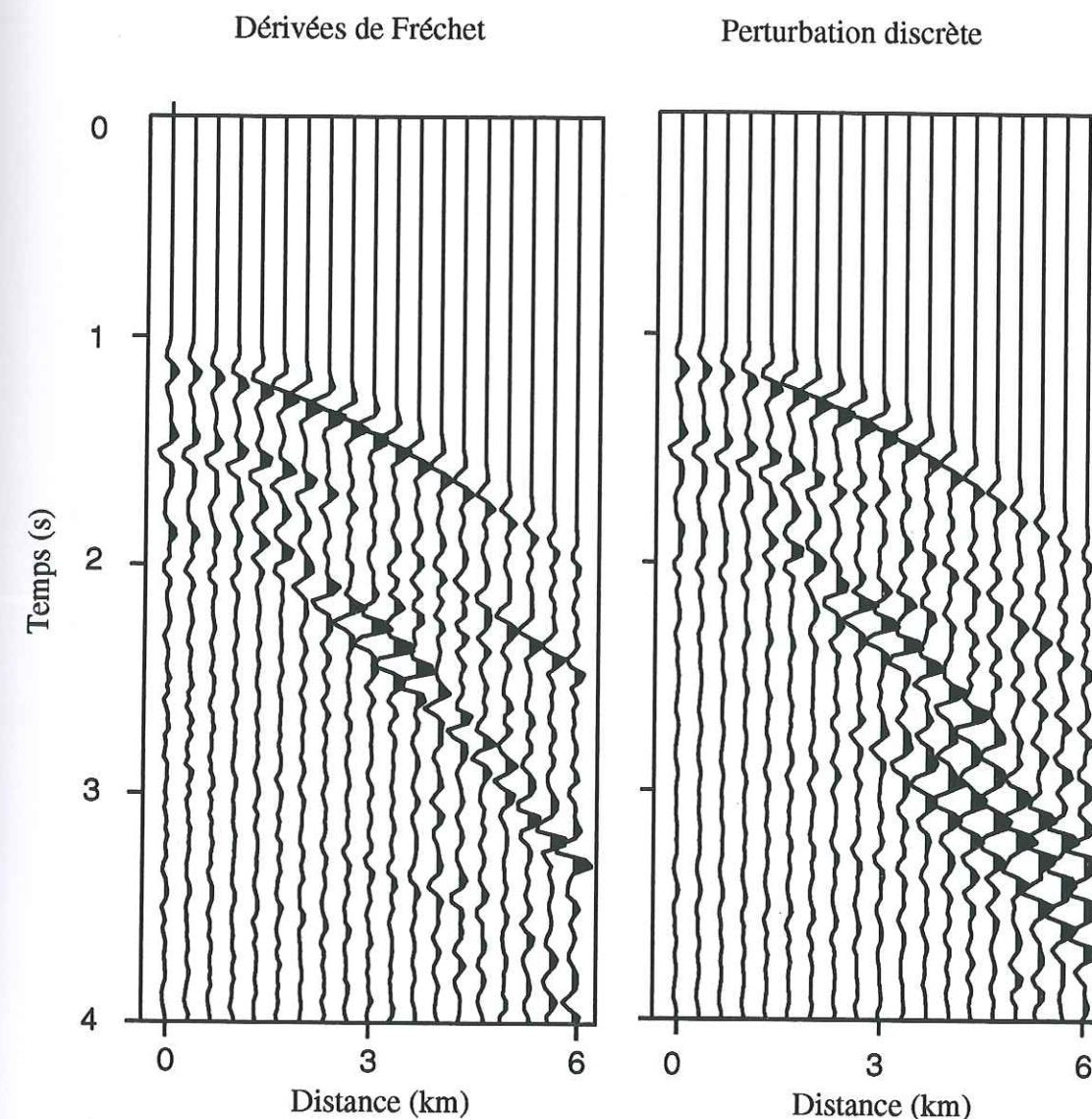


Fig 12: Comparaison des profils obtenus par la méthode des dérivées de Fréchet et la méthode des perturbations discrètes en perturbant la vitesse des ondes S le modèle de vitesse est celui de la figure 11b. On représente la composante verticale du champ de déplacement diffracté.

Chapitre 4 : Formulation du problème inverse par le critère des moindres carrés

I. Présentation

Dans les deux chapitres précédents, nous avons présenté les opérateurs qui permettent de développer une technique d'inversion par une méthode de gradient, selon les critères des moindres carrés généralisés. Ce chapitre présente la méthode inverse, et en particulier l'algorithme des gradients conjugués que nous appliquerons dans le chapitre suivant. La démarche consiste à caractériser une fonction de densité de probabilité sur l'espace des modèles. Le maximum de cette fonction sera le modèle le mieux adapté aux données. Pour ce faire, nous adoptons l'approche développée par Tarantola et Valette (1982).

Le problème consiste, dans un premier temps, à trouver la fonction de densité de probabilité la plus complète qui puisse tenir compte d'une information *a priori* et ainsi, pouvoir contraindre le problème (approche Bayésienne).

Dans un deuxième temps, nous présentons brièvement le développement mathématique de cette fonction.

Enfin, nous expliquons la technique des gradients conjugués, appliquée par de nombreux auteurs (Kormendi et Dietrich 1991). Nous verrons comment elle permet d'accélérer le processus de convergence.

II. Inversion Bayésienne

A. Approche stochastique

L'approche probabiliste exposée consiste à caractériser la conjonction de deux sources d'informations indépendantes. Elle permet de mieux contraindre le problème inverse afin de caractériser l'ensemble des paramètres du problème : les données sismiques \mathbf{d} et les paramètres caractéristiques du modèle \mathbf{m} . Ces sources seront de deux types : d'une part l'information qui permet de relier \mathbf{d} et \mathbf{m} , elle provient de notre capacité à résoudre l'équation de l'élastodynamique. A cette information correspond une fonction densité de probabilité (fdp) notée :

$$\theta(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad (1)$$

d'autre part l'information provenant de sources aussi diverses que la mesure directe de la vitesse dans des puits de forage, la nécessité d'avoir des vitesses positives, ou toute autre forme d'information indépendante de la première. Cette information est appelée l'information *a priori*. La fonction densité de probabilité reliée à cette information est notée:

$$\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \quad (2)$$

La conjonction de ces deux informations est reliée à une fonction densité de probabilité notée $\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m})$. Il s'agit d'une fonction de densité de probabilité que l'on nomme *a posteriori* et qui s'écrit (Tarantola et Valette, 1982):

$$\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \frac{\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \times \theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})}{\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})} \quad (3)$$

$\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ est une densité de probabilité reliée à l'état de non information sur les paramètres, c'est un facteur de normalisation. La démonstration¹ de cette égalité suppose des notions de probabilités qui ne seront pas abordées ici. Néanmoins ce facteur de normalisation peut se justifier en supposant, par exemple, une information *a priori* sur les paramètres inexistante. La densité de probabilité reliée à cette information est une constante², puisque nous n'avons pas apporté d'information supplémentaire, la densité de probabilité *a posteriori* reste la densité de probabilité reliée à la relation théorique reliant les paramètres. Le facteur de normalisation est alors lui aussi constant,

¹ cf Tarantola et Valette, 1982, chapitre 1.

² Tous les événements sont équiprobables

c'est-à-dire qu'il correspond bien à un état d'information nul. Il est aussi naturel que ce terme soit au dénominateur. En effet, plus il est important, plus la connaissance *a posteriori* est floue.

La présentation qui va suivre n'est qu'une traduction mathématique de cette relation, en explicitant les fonctions introduites $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$, $\theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ et $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})$.

B. Précisions

1) Il est possible de combiner différents états d'informations sur des événements distincts en appliquant les opérations élémentaires (somme et produit) sur les probabilités de chacun d'eux. Ainsi, en considérant trois événements, on donne la probabilité d'obtenir l'un d'eux connaissant les deux autres (Jeffreys, 1939). En appliquant quelques règles connues sur les probabilités (théorème de Bayes), on passe de l'approche de Jeffreys à celle de Tarantola et Valette (Tarantola et Valette, 1982, Scales and Smith, 1995). La théorie de Jeffreys est à la base des développements permettant d'élaborer la technique d'inversion linéaire par moindres carrés (Franklin, 1970).

2) Les paramètres du modèle \mathbf{m} sont les impédances des ondes P et S (IP, IS) et la densité (ρ). Leur variation en fonction de la profondeur est discrète et définit au centre de fines³ couches. Ces paramètres sont supposés indépendants.

3) Les données sismiques \mathbf{d} correspondent aux sismogrammes parfaits. Les instruments de mesure permettent d'accéder à des données \mathbf{d}_{obs} , aux erreurs de mesure près. La théorie permet de calculer des synthétiques $\mathbf{f}(\mathbf{m})$ aux erreurs de modélisation près

C. Densité de probabilité *a posteriori*

L'état d'information *a priori* sur les données et le modèle peut se dissocier en deux états disjoints, l'un sur l'espace des données, $\rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{d})$, et l'autre sur l'espace des modèles, $\rho_{\mathbf{m}}(\mathbf{m})$:

$$\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \rho_{\mathbf{d}}(\mathbf{d}) \times \rho_{\mathbf{m}}(\mathbf{m}) \quad (4)$$

Il en est de même pour l'état de non information:

³ L'épaisseur est petite par rapport à la longueur d'onde du signal

$$\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mu_d(\mathbf{d}) \times \mu_m(\mathbf{m}) \quad (5)$$

$\theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ est le produit de la densité de probabilité d'obtenir les données \mathbf{d} connaissant le modèle \mathbf{m} (elle appartient à l'espace des données) multiplié par la densité de probabilité marginale de \mathbf{m} , $\theta_m(\mathbf{m})$ (défini dans l'espace des modèles):

$$\theta(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) \times \theta_m(\mathbf{m}) \quad (6)$$

La qualité de la résolution du problème direct est indépendante du modèle considéré (cf chapitre 2). En d'autres termes, la densité de probabilité marginale $\theta_m(\mathbf{m})$ correspond à l'état de non information sur les modèles $\mu_m(\mathbf{m})$. Si le résultat du problème direct dépendait du choix du modèle nous aurions dans ce cas à tenir compte d'un état information sur le modèle.

L'expression de la densité de probabilité *a posteriori* compte tenue des suppositions précédentes s'écrit:

$$\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \frac{(\rho_d(\mathbf{d}) \times \rho_m(\mathbf{m}) \times \theta_d(\mathbf{d}) \times \mu_m(\mathbf{m}))}{\mu_m(\mathbf{m}) \times \mu_d(\mathbf{d})} \quad (7)$$

L'état d'information *a posteriori* sur le modèle résulte de l'intégration de notre relation sur l'espace des données, elle correspond à la densité de probabilité jointe:

$$\sigma(\mathbf{m}) = \int_{\mathbf{d}} \sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) d\mathbf{d} = \rho_m(\mathbf{m}) \int_{\mathbf{d}} \frac{\rho_d(\mathbf{d}) \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})}{\mu_d(\mathbf{d})} d\mathbf{d} \quad (8)$$

nous supposons que l'état d'information nulle sur les données $\mu_d(\mathbf{d})$ est équiprobable, c'est à dire constant et pour simplifier égal à 1.

$\sigma(\mathbf{m})$ se décompose comme le produit d'une fonction de densité de probabilité *a priori* sur le modèle $\rho_m(\mathbf{m})$ multipliée par une fdp $L(\mathbf{m})$ qui combine les informations obtenues par des études purement géophysiques et qui s'exprime:

$$L(\mathbf{m}) = \int_{\mathbf{d}} \rho_d(\mathbf{d}) \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) d\mathbf{d} \quad (9)$$

La suite du chapitre consiste à trouver les approximations les plus justes pour pouvoir exprimer ces deux fonctions. Ce sont des distributions qui peuvent être relativement complexes selon le degré de non-linéarité du problème.

III. Evaluation des fonctions

A. Fonction L(m)

Nous supposons que les distributions sont des fonctions Gaussiennes. Cette supposition simplifie le problème et se justifie de la manière suivante. En considérant N variables aléatoires stochastiquement indépendantes et ayant la même fonction de densité de probabilité, l'application du théorème central limite indique que la fdp de la somme de ces variables tend vers une distribution Gaussienne lorsque N tend vers l'infini. Le terme $\rho_d(\mathbf{d})$ décrit les imprécisions sur la lecture des données dues à l'instrument de mesure. Ces erreurs sont supposées aléatoires et stochastiquement indépendantes: l'erreur commise sur une lecture ne dépend pas de l'erreur commise sur la lecture précédente. Elles ont la même fonction de densité de probabilité propre à l'instrument de mesure. En considérant la densité de probabilité de la somme de toutes nos mesures (supposée infinie), on obtient une distribution Gaussienne:

$$\rho_d(\mathbf{d}) = \exp(-1/2(\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\text{obs}})^t \mathbf{C}_d^{-1} (\mathbf{d}-\mathbf{d}_{\text{obs}})) \quad (10)$$

Il en est de même pour les erreurs dues aux relations théoriques qui lient les données aux paramètres du modèle:

$$\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \exp(-1/2(\mathbf{f}(\mathbf{m})-\mathbf{d})^t \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{f}(\mathbf{m})-\mathbf{d})) \quad (11)$$

Les arguments de la fonction exponentielle représentent les expressions développées dans le cadre de la norme L^2 . \mathbf{C}_d est l'opérateur de covariance qui décrit les incertitudes sur la lecture des données, \mathbf{C}_s est l'opérateur de covariance qui décrit l'incertitude sur les calculs synthétiques des données. Dès lors:

$$L(\mathbf{m}) = \exp(-1/2(\mathbf{f}(\mathbf{m})-\mathbf{d}_{\text{obs}})^t \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{f}(\mathbf{m})-\mathbf{d}_{\text{obs}})) \quad (12)$$

\mathbf{C}_D est l'opérateur de covariance décrivant les incertitudes sur les données observées, tel que: $\mathbf{C}_D^{-1} = \mathbf{C}_d^{-1} + \mathbf{C}_s^{-1}$

B. Information a priori

L'information *a priori* est un résultat d'observations objectives qui contraint la solution *a posteriori*. On détermine un modèle de départ par des observations qui peuvent être directes (mesures effectuées dans des puits de forage) ou indirectes par un pré-traitement sismique (comme ce sera le cas dans cette thèse). Cette opération

détermine un échantillon de paramètres, chacun d'eux étant pondéré d'une probabilité reliée à l'imprécision sur les mesures. La probabilité est d'autant plus grande que la mesure est effectuée avec précision. Nous obtenons ainsi une distribution dont nous cherchons à définir la fonction densité de probabilité. Si la fonction est bien déterminée, une somme d'informations déterministes est traduite en une information stochastique.

En supposant la loi de distribution Gaussienne, on introduit un lissage de la solution et donc, une perte d'information. En contrepartie on simplifie le problème en le portant à un simple calcul de variance et de covariance sur les échantillons (détermination des moments d'ordre 1 et d'ordre 2). Scales & Tarantola (1994) proposent un problème plus complexe en déterminant les moments d'ordre plus élevés (en calculant les histogrammes) jusqu'à un critère d'arrêt défini par des hypothèses statistiques. Cette méthode est limitée par les temps de calculs relativement importants.

Shannon (1948) relie la définition de l'entropie d'un système introduite en physique statistique, à la définition d'une entropie discrète des probabilités définies pour chaque échantillon. Jaynes (1957), montre que la fonction de densité de probabilité sur les mesures doit avoir le maximum d'entropie ce qui, compte tenu des contraintes qu'induisent les moments, revient à écrire la fonction densité de probabilité sous une forme relativement complexe où apparaissent les multiplicateurs de Lagrange. Le calcul le plus complet consiste à déterminer les multiplicateurs de Lagrange. Pour cela on peut utiliser l'algorithme de Gouveia (1996) dans le cas d'un échantillonnage multidimensionnel, il généralise le cas unidimensionnel développé par Mead et Papanicolaou (1984).

La distribution Gaussienne est une distribution qui maximise l'entropie et qui satisfait les moments jusqu'à l'ordre deux. Ainsi, en ne considérant que les contraintes imposées par les deux premiers moments, on définit la fonction densité de probabilité Gaussienne

$$\rho_m(m) = \exp(-1/2((m-m_{\text{prior}})^T C_M^{-1} (m-m_{\text{prior}})) \quad (13)$$

Cette opération consistant à transcrire l'information *a priori* sous la forme d'une fonction de densité de probabilité Gaussienne s'appelle la régularisation quadratique. Lorsque l'on suppose que la fonction est Gaussienne, elle est dite quadratique. La grande majorité des algorithmes d'inversion se contentent d'une distribution Gaussienne. Satisfaire les moments jusqu'à des ordres plus élevés reste une opération

très sensible aux erreurs d'échantillonnage des moments pour être incluse dans des routines d'inversion.

Ainsi dans l'espace des modèles, la densité de probabilité d'obtenir le modèle m s'écrit:

$$\sigma(m) = \exp(-1/2((f(m)-d_{\text{obs}})^T C_D^{-1} (f(m)-d_{\text{obs}})) + (m-m_{\text{prior}})^T C_M^{-1} (m-m_{\text{prior}})) \quad (14)$$

Si la relation théorique liant les paramètres du modèle avec les données était linéaire, $\sigma(m)$ serait une Gaussienne pour laquelle on pourrait calculer le centre et la matrice de covariance. Or cette relation est non-linéaire et $\sigma(m)$ peut avoir un comportement plus ou moins chaotique suivant le degré de non linéarité. Dans ce cas, la résolution se restreint généralement à la détermination du point de l'espace du modèle pour lequel la fdp est maximale, c'est-à-dire le point de voisinage de vraisemblance, en supposant que $\sigma(m)$ ait un comportement suffisamment régulier pour que ceci ait un sens. Pour ce faire, on introduit la fonction

$$S(m) = 1/2((g(m)-d_{\text{obs}})^T C_D^{-1} (g(m)-d_{\text{obs}})) + (m-m_{\text{prior}})^T C_M^{-1} (m-m_{\text{prior}}) \quad (15)$$

La solution est atteinte quand $S(m)$ est minimale. $S(m)$ est appelée fonction coût, ou critère des moindres carrés. Le problème inverse se transforme en un problème de minimisation d'une fonction scalaire. En définissant des fdp Gaussiennes, nous définissons le critère des moindres carrés au sens de la norme L^2 . Puisque la relation $d = f(m)$ n'est ni linéaire, ni fortement chaotique, c'est souvent le cas en sismique, la fdp *a posteriori* n'est plus véritablement une Gaussienne, le critère des moindres carrés n'est plus forcément défini au sens de la norme L^2 . D'autres choix de normes peuvent être retenus. Nous exposerons ce point dans le chapitre suivant.

IV. Méthode de résolution

Nous allons définir quelques termes importants pour pouvoir appliquer les algorithmes de minimisation que nous développerons dans le paragraphe suivant.

A. définitions

1. Gradient de la fonction coût:

C'est la dérivée de la fonction coût par rapport au modèle \mathbf{m} au point $\mathbf{m} = \mathbf{m}_n$, on le note $\hat{\gamma}$

$$\hat{\gamma} = \left. \frac{\partial S}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_n} = \mathbf{F}_n^t \mathbf{C}_D^{-1} [\mathbf{f}(\mathbf{m}_n) - \mathbf{d}_{\text{obs}}] + \mathbf{C}_M^{-1} (\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_{\text{prior}}) \quad (16)$$

C'est un élément du dual de l'espace des modèles. On définit ensuite la descente de plus grande pente en multipliant le gradient par la matrice de covariance \mathbf{C}_M . Cette opération donne l'expression du gradient de la fonction coût dans l'espace des modèles.

$$\gamma = \mathbf{C}_M \hat{\gamma}_n = \mathbf{C}_M \mathbf{F}_n^t \mathbf{C}_D^{-1} [\mathbf{f}(\mathbf{m}_n) - \mathbf{d}_{\text{obs}}] + (\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_{\text{prior}}) \quad (17)$$

Le gradient de la fonction coût peut aussi être évalué directement par la technique de l'état adjoint (Lions 1968 et Chavent 1974). La solution de l'équation de l'élastodynamique perturbé dans l'espace adjoint permet d'exprimer le gradient directement par rapport au champ d'onde propagé dans le milieu non perturbé, aux paramètres du modèle \mathbf{m} et à la perturbation occasionnée $\delta \mathbf{m}$. Jurado (1995) applique cette technique en calculant le gradient dans le domaine fréquence-nombre d'onde, et caractérise la transformation de Hankel approprié qui permet de transformer ce gradient dans le domaine temps-distance.

2. Hessien de la fonction coût

C'est la dérivée seconde de $S(\mathbf{m})$ par rapport au modèle \mathbf{m} au point $\mathbf{m} = \mathbf{m}_n$

$$\hat{\mathbf{H}}_n = \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{m}^2} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_n} = \left. \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \mathbf{m}} \right|_{\mathbf{m}=\mathbf{m}_n} \quad (18)$$

Nous ne tenons pas compte du terme du deuxième ordre dans le développement que l'on fait de cet opérateur. Comme pour le gradient, c'est un élément de l'espace dual des modèles. En le multipliant par la matrice de covariance \mathbf{C}_M on définit l'opérateur de courbure de la fonction coût qui lui, appartient à l'espace des modèles.

$$\mathbf{H}_n \approx \mathbf{C}_M \hat{\mathbf{H}}_n = \mathbf{C}_M \mathbf{F}_n^t \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{F}_n + \mathbf{I} \quad (19)$$

B. Méthodes de minimisation de la fonction coût

Bien que notre étude ne porte pas sur la résolution de problèmes linéaires, nous avons supposé que la solution du problème pouvait être caractérisée par un pic de

maximum de vraisemblance. C'est la technique qui permet de tendre vers ce maximum que nous exposons à présent.

Le modèle estimé correspond au minimum de la fonction coût. Nous nous plaçons dans les conditions réalistes qui permettent d'appliquer les méthodes de minimisation d'une fonction sans devoir parcourir l'espace des modèles par des méthodes globales ou semi-globales afin de vérifier que le minimum trouvé ne soit pas un minimum secondaire (cf chapitre 1). Deux types de méthodes itératives sont envisageables, les méthodes de Newton et les méthodes de gradient.

1. Méthodes de Newton

Ces méthodes recherchent le zéro du gradient. Une itération, n , consiste à déterminer le zéro de la tangente du gradient au point \mathbf{m}_n et fournit le modèle \mathbf{m}_{n+1} : comme le montre la figure 1 pour le cas simple où la variable m est à une dimension.

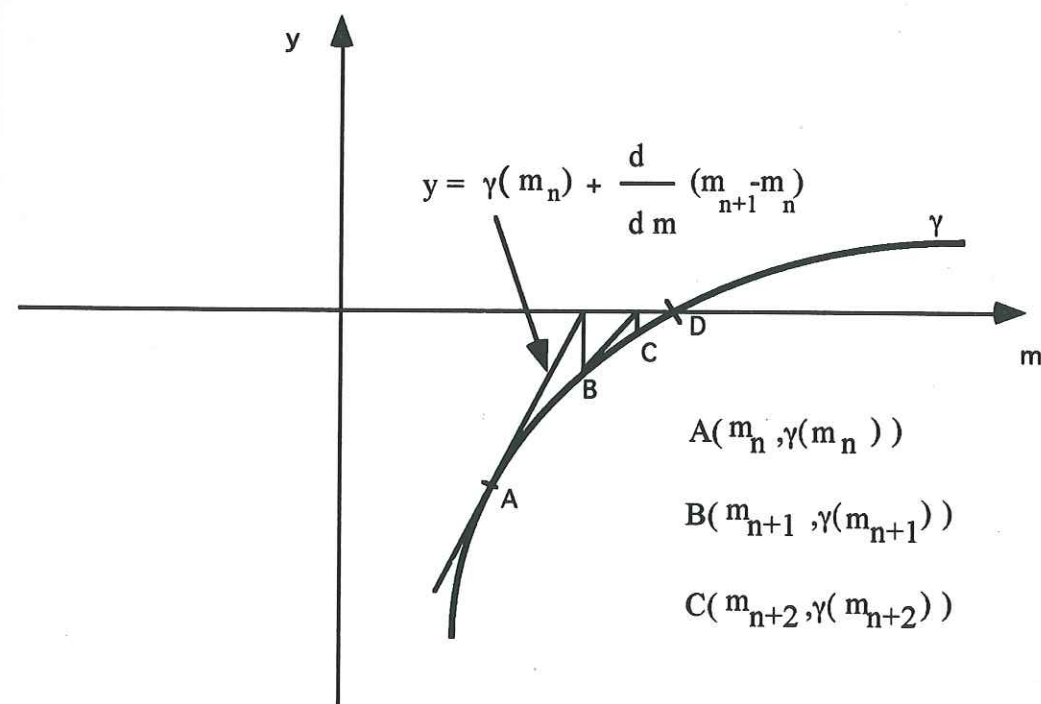


Figure VI.1: Illustration de la recherche du zéro d'une fonction pour une variable à une dimension par la méthode de Newton. L'algorithme part du point; on trace la tangente à la courbe de la fonction en A, et on recherche le point de cette tangente d'ordonnée nulle. Ce point définit le point B. On itère à nouveau jusqu'au point D.

Dans ce cas de variable à une dimension, cette recherche se traduit par l'algorithme

$$f(m_{n+1}) = f(m_n) + \left(\frac{df}{dm} \right)_{m=m_n} (m_{n+1} - m_n) = 0 \text{ soit } m_{n+1} = m_n - \left(\frac{df}{dm} \right)_{m=m_n}^{-1} f(m_n)$$

En appliquant ce raisonnement pour un espace de variables à plusieurs dimensions on définit l'algorithme:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \nabla \gamma_n^T (m_{n+1} - m_n) \quad (20)$$

On reconnaît l'expression de la matrice transposée du Hessien. Cette matrice est symétrique. Ainsi le modèle qui tend vers le minimum de la fonction est défini par l'égalité:

$$m_{n+1} = m_n - H_n^{-1} \gamma_n \quad (21)$$

Puisque l'opérateur est non linéaire, la correction ne conduit plus directement au minimum et peut diverger. Il convient alors de vérifier pour chacune des étapes que la fonction coût décroît. Une possibilité consiste à définir un réel positif ε inférieur à 1 pour pondérer la correction apportée au modèle à l'itération n et tester par une méthode de type succès-échec (comme celle que nous présenterons dans le paragraphe suivant).

Dès lors:

$$m_{n+1} = m_n - \varepsilon H_n^{-1} \gamma_n \quad (22)$$

Cette méthode donne de bons résultats mais les calculs à mettre en oeuvre sont très lourds à gérer. La taille des matrices est trop importante si l'on veut les inverser rapidement, de plus les éléments du Hessien varient peu d'une itération à l'autre. Un alternatif possible pour ces méthodes consiste à déterminer l'inverse du Hessien après un certain nombre d'itérations. Il est même envisageable d'adapter l'algorithme de Newton en adaptant une matrice définie positive Q qui s'inverse rapidement et telle que le modèle m_{n+1} soit calculé de la manière suivante:

$$m_{n+1} = m_n - Q \gamma_n \quad (23)$$

ce sont les méthodes quasi-Newton.

2. Méthodes de gradient

La convergence vers le minimum de la fonction coût nécessite de définir une direction de descente δ_n suivant laquelle on descend d'un pas μ_n . L'algorithme est donc donné par la relation:

$$m_{n+1} = m_n + \mu_n \delta_n \quad (24)$$

en tenant compte de la condition

$$S(m_{n+1}) < S(m_n)$$

μ_n est un réel positif choisi de manière à minimiser la fonction coût. Nous verrons par quelle manière nous le calculons dans le paragraphe suivant. Ce qui différencie les méthodes de gradient tient à la façon dont on détermine la direction de descente, nous appliquons l'une de ces méthodes, la méthode des gradients conjugués.

C. Méthode des gradients conjugués

1. Algorithme

La méthode que nous appliquerons utilise l'algorithme des gradients conjugués. Elle dérive de la méthode de plus grande pente (celle-ci consiste à prendre une direction de descente égale à l'opposé du gradient). La méthode de gradient conjugué est cependant plus fiable et pas plus coûteuse en temps de calcul. L'algorithme s'écrit:

$$\gamma_n = C_M F_n^T C_D^{-1} (f(m_n - d_{\text{obs}}) + (m_n - m_{\text{prior}})) \quad (25)$$

$$\phi_n = \gamma_n + \alpha_n \phi_{n-1} \text{ et } \phi_0 = \gamma_0 \quad (26)$$

$$m_{n+1} = m_n - \mu_n \phi_n \quad (27)$$

ϕ_n représente la direction de descente, elle dépend des directions de descentes précédentes et du gradient de la fonction coût, nous développons à présent la méthode permettant de déterminer la valeur du pas de descente μ_n .

2. Recherche linéaire

A chaque itération, pour un modèle m_n et une direction de descente ϕ_n donnée, la valeur optimale de μ_n annule la dérivée de la fonction coût par rapport à toutes les longueurs possibles.

$$\left(\frac{ds}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_n} = 0 \quad (28)$$

cette condition compte tenue des notations précédentes s'écrit

$$\left(\frac{ds}{d\mu} \right)_{\mu=\mu_n} = \nabla S(\mathbf{m}_{n+1})^T \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{n+1}}{\partial \mu_n} = \gamma_{n+1}^T \cdot \frac{\partial \mathbf{m}_{n+1}}{\partial \mu_n} = \gamma_{n+1}^T \cdot \phi_n = 0 \quad (29)$$

le point désigne le produit scalaire⁴

elle définit un critère d'arrêt le long de la direction de descente. Le meilleur point est tel que le gradient de la fonction coût en ce point soit perpendiculaire à la direction de descente choisie.

Un développement du gradient au premier ordre en $(\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n)$ donne:

$$\gamma_{n+1} \approx \gamma_n + \nabla \gamma_n^T (\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n) = \gamma_n + \mathbf{H}_n (\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n) \quad (30)$$

le critère d'arrêt permet d'écrire:

$$\gamma_{n+1} \cdot \phi_n \approx \gamma_n \cdot \phi_n + \mathbf{H}_n (\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{m}_n) \cdot \phi_n = \gamma_n \cdot \phi_n + \mathbf{H}_n (\mu_n \phi_n) \cdot \phi_n = 0 \quad (31)$$

en développant le produit scalaire on obtient une expression de μ_n , la norme du vecteur direction de descente s'écrit:

$$\mu_n = \frac{\gamma_n^T \mathbf{C}_M^{-1} \phi_n}{\phi_n^T \mathbf{H}_n \mathbf{C}_M^{-1} \phi_n} \quad (32)$$

L'estimation du gradient à l'itération $n+1$ par son développement au premier ordre (27) est d'autant plus biaisée que le problème inverse est non-linéaire. Pour des problèmes inverses linéaires pour lesquels la fonction coût est quadratique, c'est-à-dire que le gradient est une droite, l'estimation est correcte. Pour notre cas de sismique non-linéaire, il convient de vérifier la norme obtenue. Plusieurs techniques sont envisageables pour vérifier et optimiser à nouveau cette norme. Nous appliquerons une méthode type succès-échec suivie d'une interpolation à l'aide d'une parabole (Nash, 1979). La recherche du type succès-échec peut se présenter simplement par le schéma d'algorithme suivant (figure IV.2)

⁴ On définit le produit le produit scalaire suivant $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{C}_E^{-1} \mathbf{v}$ E représente l'espace des données où l'espace des modèles.

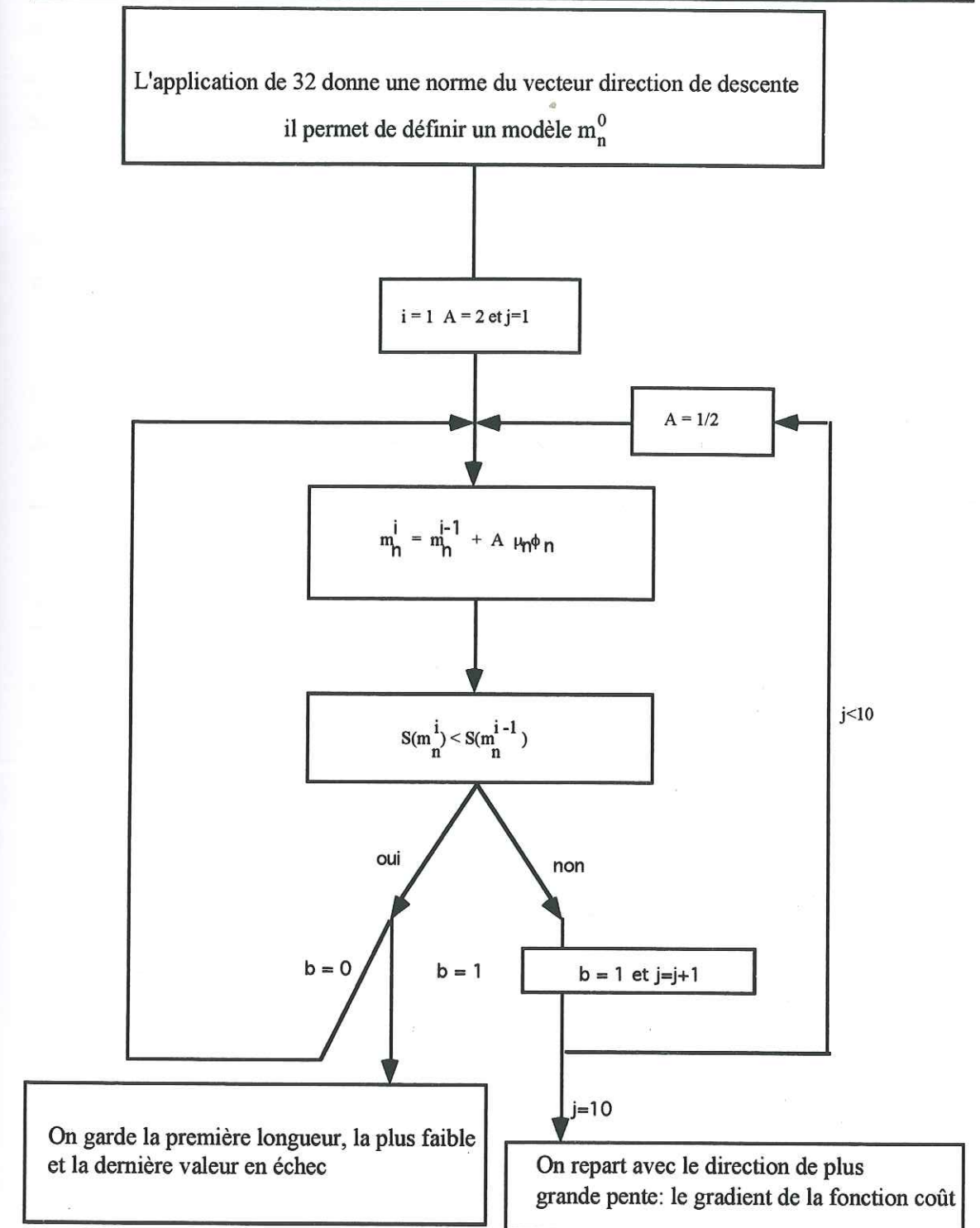


Figure IV.2: Schéma de l'algorithme de recherche de la longueur du pas par succès-échec

Par les trois points obtenus d'après l'étape de recherche par succès-échec on fait passer une parabole. Cette technique est illustrée pour un espace à deux dimensions (figure IV.3). Les points S1, S2, et S3 correspondent aux trois points déterminés d'après la

recherche par succès échec. La courbe en traits pleins représente l'intersection de la fonction coût avec le plan défini par la direction de descente, et la perpendiculaire au plan des paramètres. Le point le plus bas de cette parabole est le nouveau modèle obtenu.

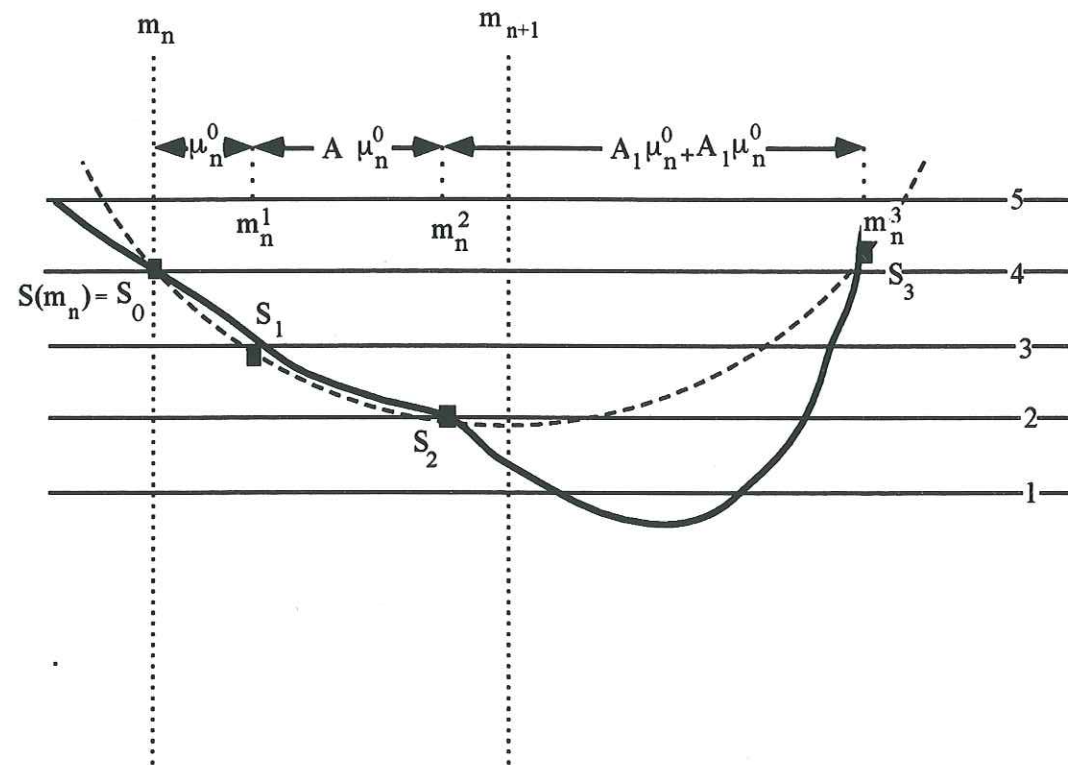


Figure IV.3: Illustration de la recherche linéaire « succès-échec + parabole » pour un espace à deux dimensions, d'après Kormendi, 1989.

On recommence cette opération pour les itérations suivantes de l'inversion

3. Direction conjuguée

ϕ_n représente la direction de descente. La direction de descente d'une méthode de plus grande est la direction opposée du gradient de la fonction coût. Pour les méthodes de gradients conjugués, cette direction de descente est prise pour la première itération uniquement. Chacune des itérations suivantes ne prend pas successivement la direction perpendiculaire⁵ à la précédente, mais des directions conjuguées. Ces directions de descente ne s'obtiennent pas en minimisant la fonction coût par rapport à leur gradient, mais par rapport à un sous-espace engendré par les directions de descente précédentes.

⁵ D'après l'équation (4.29) si $\phi_n = \gamma_n$ alors à chaque itération on part dans une direction perpendiculaire

$$\phi_0 = \gamma_0$$

$$\phi_n = \gamma_n + \alpha_n \phi_{n-1}$$

La figure IV.3 schématise la recherche de la direction de descente entre deux itérations. Les courbes de niveau sont les projections de la fonction coût sur le plan à deux dimensions défini par les deux types de paramètres m_1 et m_2 . La figure IV.3 est la coupe perpendiculaire à ce plan passant par la direction de descente.

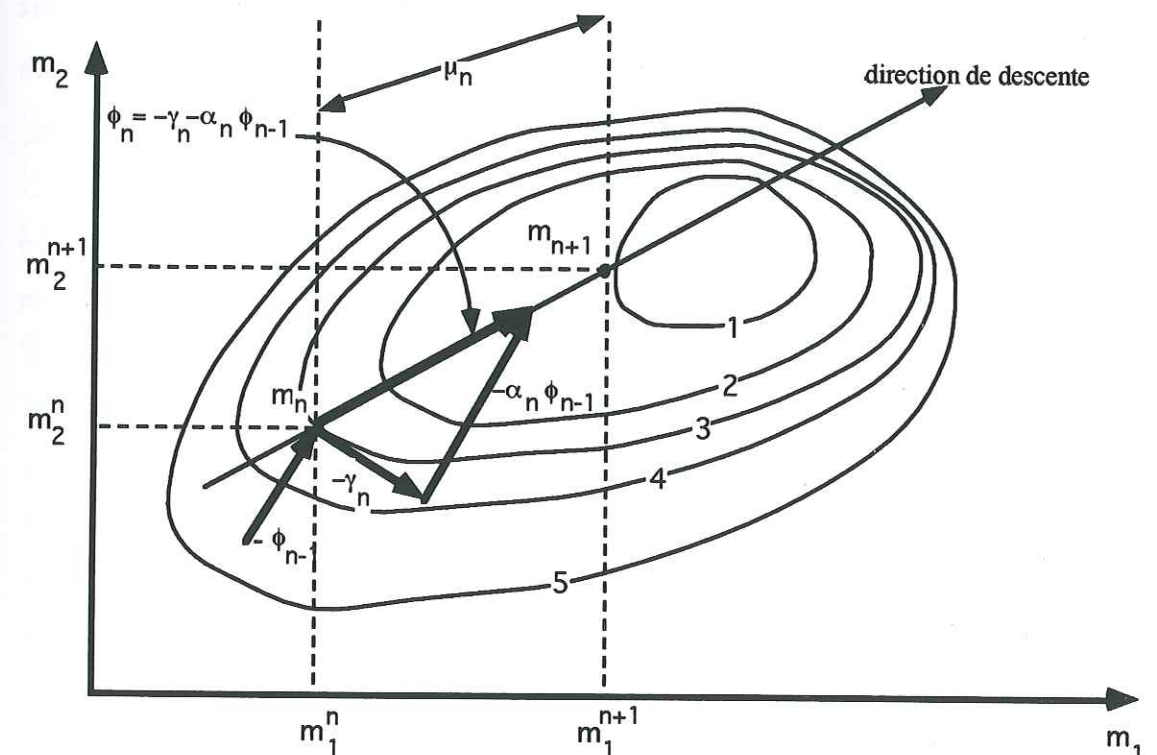


Figure IV.4: Illustration de la méthode des gradients conjugués pour un espace à deux dimensions, d'après Kormendi, 1989.

Diverses expressions sont envisageables pour définir le coefficient α_n . Nous retenons ici celle de Polack et Ribière (1969) qui semble donner de meilleurs résultats (Powell, 1981).

$$\alpha_n = \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1}) \cdot \gamma_n}{\gamma_{n-1} \cdot \gamma_{n-1}} = \frac{(\gamma_n - \gamma_{n-1})^t C_M^{-1} \gamma_n}{\gamma_{n-1}^t C_M^{-1} \gamma_{n-1}} \quad (33)$$

L'efficacité de la méthode des gradients conjugués ne se mesure qu'au delà d'un grand nombre d'itérations, par exemple pour reconnaître la ligne de descente générale

dans une vallée étroite où la méthode des gradients procède par une série de zigzags, au prix d'un grand nombre d'itérations.

V. Choix des paramètres inversés et de la norme

A. Choix des paramètres d'inversion

Pour décrire un milieu élastique il suffit de connaître la densité, le tenseur élastique c_{ijkl} et les paramètres qui décrivent l'atténuation. Nous supposons au premier ordre la Terre isotrope et non atténuante. Le tenseur c_{ijkl} n'est plus fonction que des deux paramètres de Lamé λ et μ . Tarantola (1986) évalue l'indépendance entre les paramètres de 3 triplets caractéristiques des ondes sismiques: la densité et les paramètres de lamé, la densité et les vitesses des ondes sismiques et enfin la densité et les impédances P et S (densité multipliée par la vitesse des ondes P ou S). Pour chacun des triplets, il perturbe séquentiellement les paramètres en un point du modèle. Les figures de diffraction obtenues doivent pouvoir être différenciées si les paramètres sont indépendants. En se basant sur ce critère, les conclusions apportées suggèrent de travailler pour les courtes longueurs d'ondes à partir des impédances P et S et pour les grandes longueurs d'ondes à partir des vitesses sismiques. Ces résultats sont confirmés par des études sur des cas de données synthétiques menées par Assous (1989). Les impédances P et S sont directement reliées aux coefficients de réflexion d'une onde sismique sur une interface et permettent ainsi de mieux définir les réflecteurs. Les vitesses sismiques sont reliées au temps d'arrivée et ainsi leur mauvaise interprétation perturbe tout le sismogramme et non plus seulement, comme c'est le cas pour les impédances, la valeur du coefficient de réflexion. Kormendi et Dietrich (1991) en travaillant dans le domaine tau-p et en appliquant la méthode sur des cas synthétiques ont montré la difficulté à inverser correctement la densité. L'inversion réalisée à partir des impédances des ondes P et S donne par contre de bons résultats. Kormendi (1989) propose alors d'inverser simultanément les vitesses des ondes P et S, et la densité en pondérant différemment la correction de la densité de celles des vitesses des ondes P et S. Tarantola (1986) propose d'inverser séquentiellement les paramètres par ordre d'importance vis à vis des données. Aux incidences quasi-normales, la vitesse des ondes S a peu d'effets, une technique consiste alors à inverser d'abord l'impédance des ondes P à incidence normale, puis

d'étendre progressivement l'inversion pour des distances sources récepteurs plus grandes et inverser l'impédance des ondes S.

Plusieurs tentatives d'inversion sur des cas réels n'ont permis l'évaluation fiable que d'un seul paramètre, l'impédance P (Crace, 1990). Debski et Tarantola (1995) proposent de remplacer le paramètre d'impédance des ondes S par le coefficient de Poisson. Igel *et al.* (1993) inversent des formes d'ondes réelles de sismique marine préalablement sommées sur une zone très plane. Cette sommation masque les effets d'atténuation propre aux couches sédimentaires non-consolidées et difficiles à modéliser. Cette étude a permis d'extraire deux paramètres significatifs des données observées, mais ne permet pas de privilégier le choix du coefficient de Poisson à l'impédance des ondes S. Plusieurs études menées à l'IFP corroborent l'idée de ne pas inverser systématiquement le coefficient de Poisson au lieu de l'impédance des ondes S (Petit, 1997).

Dietrich (1990) souligne non seulement le problème de couplage entre les différents paramètres inversés mais aussi la bonne évaluation de la fonction source qui est un préalable à toute inversion sérieuse de données réelles. L'effet d'une mauvaise déconvolution de la source est un facteur d'échec en inversion que nous discuterons plus en détail dans le chapitre suivant et qui s'ajoute à ce problème de couplage des paramètres.

B. Le problème de la norme L^2

La théorie développée dans le cas de la norme L^2 manque de robustesse dès l'instant où les données que l'on inverse sont bruitées. Pour cette raison, on peut préférer travailler avec la norme L^1 (Claerbout et Muir, 1973). L'étude menée par Crace (1990) a porté sur des données réelles et a eu pour but de tester divers critères de minimisation pour pouvoir conclure sur le meilleur choix possible pour trouver un compromis entre la norme L^1 et la norme L^2 . Les études menées sur des données réelles montrent que le bruit altère considérablement la solution obtenue à l'aide du critère de minimisation au sens de la norme L^2 . Le test a porté sur quatre normes différentes: les normes L^1 et L^2 , la norme de Cauchy et la norme de la sécante hyperbolique (Crace *et al.* figure 3). Les tests ont porté sur des données synthétiques ainsi que sur des données bruitées. Les résultats montrent assez clairement la non robustesse de la norme L^2 par rapport aux autres normes dans le cas où une addition de bruit aux données est opérée. Ils montrent

que pour obtenir des résultats de bonne qualité, la méthode la plus robuste et la plus simple qui minimise la fonction coût est le critère de la sécante hyperbolique. Les modifications à apporter par rapport à la méthode développée dans le chapitre précédent sont minimales. Elles consistent à considérer le poids résiduel non plus comme $C^{-1}_D(d^i - g(m_n))$ mais comme sa tangente hyperbolique $\tanh(C^{-1}_D(d^i - g(m_n)))$.

On ne calcul plus le gradient de la fonction coût en appliquant la relation:

$$\gamma_n = C_M F_n^t (C_D^{-1} \delta d) + (m_n - m_{\text{prior}})$$

mais

$$\gamma_n = C_M F_n^t \tanh(C_D^{-1} \delta d) + (m_n - m_{\text{prior}}) \quad (34)$$

Ce choix se justifie par l'analyse suivante. Lorsque le résidu est faible, cette fonction se comporte comme la norme L^2 , mais lorsque le résidu est plus important, cette norme se comporte comme la norme L^1 .

VI. Algorithme d'inversion: résumé

L'algorithme de la figure IV.5 présente les différentes étapes de l'inversion des formes d'ondes sismiques que nous appliquerons dans le chapitre suivant. L'étape essentielle est l'étape 5. Elle permet le calcul du gradient de la fonction coût déterminé à partir des dérivées de Fréchet que nous calculons selon la méthodologie décrite dans le chapitre 3. L'étape 7 concerne la recherche linéaire décrite à partir de l'algorithme présenté sur la figure IV.2

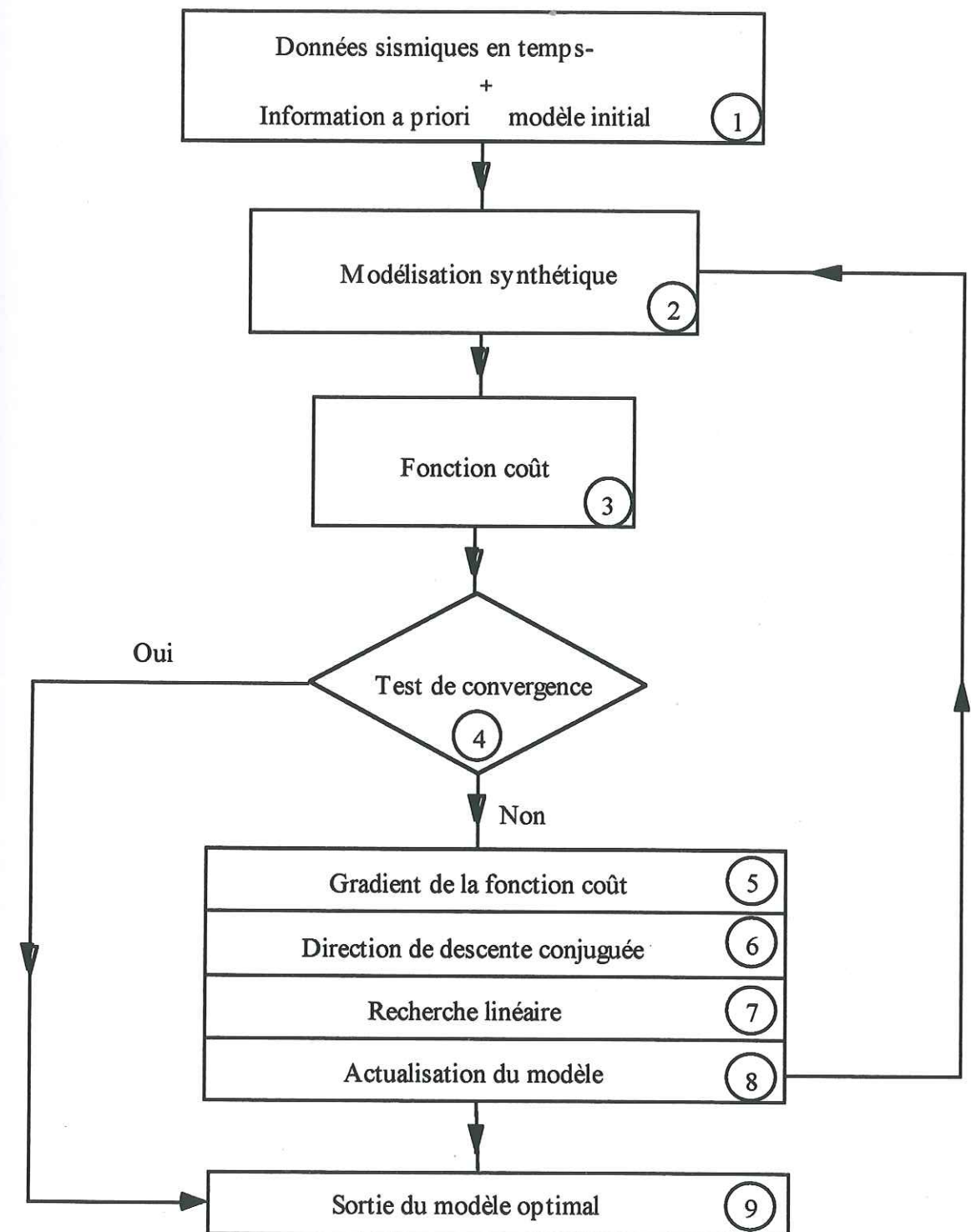


Figure IV.5: Schéma de l'algorithme d'inversion selon le critère des moindres carrés généralisés. La minimisation de la fonction coût est obtenue par une technique de gradients conjugués.

VII. Conclusions

La grande variabilité des propriétés élastiques des milieux étudiés en fonction de la profondeur impose des temps de calcul de sismogrammes haute fréquences relativement long. Ce handicap ne laisse guère de choix sur la méthode inverse et ne permet pas d'appliquer des méthodes globales ou même semi-globales. Un algorithme de minimisation par le critère des moindres carrés généralisés est plus adapté pour réduire les écarts entre les données que nous synthétisons et les données que nous inversons. Pour les phénomènes non-linéaires que nous étudions la méthode est itérative et ne peut converger qu'au prix d'un grand nombre d'itérations. Pour optimiser les temps de calcul nous appliquons la méthode des gradients conjugués qui permet de converger plus rapidement.

Cette méthode intègre une information *a priori* sur le modèle sous la forme d'une fonction de densité de probabilité supposée Gaussienne. Une caractéristique générale à toutes les méthodes de minimisation (méthode de Newton, méthode de la plus grande pente, méthodes de gradients conjugués) suppose de pouvoir définir un modèle initial suffisamment proche de la réalité pour que la solution ait un sens. Cela constitue une limite pour ces méthodes car une connaissance *a priori* du milieu étudié est difficilement précise.

Techniquement, la minimisation de la fonction coût, où fonction écart, donne des résultats plus intéressants en privilégiant la norme sécante hyperbolique, plus robuste que la norme L^2 . Enfin, nous inversons par rapport au triplet de paramètres constitué de la densité et de l'impédance des ondes P et S. Ce triplet de paramètres est en effet le mieux adapté à l'inversion de sismogrammes hautes fréquences que celui constitué de la vitesse des ondes P, S et de la densité.

Chapitre 5: Applications de la méthode d'inversion

I. Introduction

La méthode d'inversion présentée dans le chapitre précédent a été largement étudiée durant ces 10 dernières années. Elle a été principalement appliquée à des cas synthétiques (Gaultier *et al.*, 1986, Kormendi 1989, Jurado, 1992) mais aussi à des cas réels (Dietrich, 1990, Wood et Lindwall, 1996, Gouveia, 1996, Djikpessé, 1996). La robustesse de cette méthode a été testée en bruitant des sismogrammes synthétiques et en comparant les résultats obtenus avec ceux que donnent l'inversion des sismogrammes synthétiques non bruités. Après avoir vérifié la validité de nos calculs dans des cas simples, nous compléterons les études menées sur la robustesse de la méthode en étudiant les effets de trois types d'erreurs imposées aux données synthétiques:

1) La fonction source: le fait de ne pas inverser simultanément les caractéristiques de la source et des paramètres du milieu suppose que la signature de la source est connue. Si le signal source est mal connu, ces imprécisions seront interprétées en termes de propriétés du milieu et se traduisent par des erreurs dans la reconstruction du milieu. En simulant le cas d'une mauvaise définition de la source, nous analyserons les effets produits sur les résultats de l'inversion.

2) Les imprécisions sur les positions de la source et des récepteurs: que ce soient celles concernant les lieux d'émission ou de réception, elles introduisent des décalages temporels des signaux par rapport aux données synthétiques. Ce décalage est une autre source d'erreur d'interprétation des résultats. Nous avons testé la robustesse de la méthode d'inversion en imposant de faibles décalages aux données synthétiques que nous inversons.

3) Limites théoriques de la stratification plane: tous nos calculs de sismogrammes synthétiques supposent que la stratification des milieux étudiés est plane. Nous avons inversé des données synthétiques obtenues à partir de modèles monoclinaux avec de faibles pendages en supposant que le milieu recherché est à stratification plane et horizontale. Cette étude nous a permis d'étudier la détérioration des modèles reconstruits en fonction du pendage de la stratification.

Avant d'appliquer la méthode à des données réelles, nous avons inversé des données synthétiques dans le cas d'un modèle marin multicouches réaliste. La section synthétique a été déterminée de manière à respecter les conditions de l'inversion de données réelles: même géométrie source-récepteurs, même fréquence dominante et même fenêtre temporelle.

II. Précisions concernant les différentes études

Pour tous les modèles synthétiques considérés, la première couche a une vitesse d'onde S nulle. Les paramètres élastiques de cette couche ne sont pas inversés. Il en est de même pour la dernière couche qui constitue le demi-espace homogène à la base du modèle.

La matrice de covariance des données est supposée diagonale, ce qui signifie qu'il n'existe aucune corrélation entre les erreurs des données. La matrice de covariance des modèles est diagonale elle aussi, cela suppose que les différents paramètres du modèle sont indépendants. Le triplet de paramètres que nous inversons correspond aux impédances P, S et à la densité.

Les inversions sont séquentielles. Chaque étape consiste à inverser une partie du jeu de données avec un certain nombre d'itérations. Lorsque la variation de la fonction coût par rapport à l'itération précédente ne dépasse pas 0.5% pour trois itérations successives, l'étape est terminée. Les sections synthétiques inversées sont calculées pour un modèle vrai. En général, la première étape de l'inversion améliore notablement, et en quelques itérations seulement la corrélation entre la section calculée pour un modèle *a priori* et celle calculée pour le modèle vrai. Le modèle obtenu en fin d'itération est le modèle final pour l'étape considérée. L'étape suivante consiste à rajouter de l'information en considérant un plus grand nombre de traces à inverser et/ou une fenêtre temporelle plus grande. Le modèle de départ est le modèle final obtenu à l'étape précédente.

La source et les récepteurs sont positionnés dans un repère orthonormé. L'axe des abscisses est horizontal. Dans toutes nos simulations, la position de la source est à l'abscisse nulle; sa profondeur peut varier, autorisant ainsi l'analyse de profils de sismique réflexion mais aussi de profils OBS ou verticaux.

III. Modèle à couches épaisses

A. Description du modèle

1. Modèle vrai

Le modèle considéré est un modèle constitué d'une première couche de 500 mètres d'épaisseur et de 9 couches d'épaisseurs constantes (100 mètres), représentant une série de couches sédimentaires incluant une zone à faible vitesse (fig 5.3.1). La dixième couche correspond au demi-espace.

2. Modèle *a priori*

Le modèle de départ pour l'inversion est un modèle à densité et à vitesse constantes en ce qui concerne les couches sédimentaires. La vitesse des ondes P est égale à 2,5 km/s, celle des ondes S est égale à 1.0 km/s et la masse volumique vaut 1.7 g/cm³. L'expression de la matrice des dérivées de Fréchet est évaluée au centre de fines couches (cf chapitre 3). L'épaisseur de ces couches correspond au quart de l'épaisseur des couches sédimentaires du modèle vrai. Ce modèle est ainsi constitué de 42 couches d'épaisseur constante et égales à 25 mètres.

B. Résolution

Le champ sismique inversé, calculé à partir du modèle vrai, est généré par une source ponctuelle (force verticale) caractérisée par un signal de Ricker de fréquence dominante 2,66 Hertz. La source est placée à une profondeur de 1 mètre dans la première couche. La fréquence maximale est de 8 Hertz. Les composantes verticales des déplacements sont calculées pour 50 récepteurs régulièrement répartis à la surface du modèle et situés à des distances de 100 mètres à 500 mètres par rapport à la source. Dans ces simulations, les réflexions à la surface libre n'ont pas été prises en compte.

Première étape: Les sismogrammes inversés correspondent aux 10 premiers récepteurs régulièrement espacés de 100 à 180 mètres. Ils sont calculés sur une durée de 4 secondes.

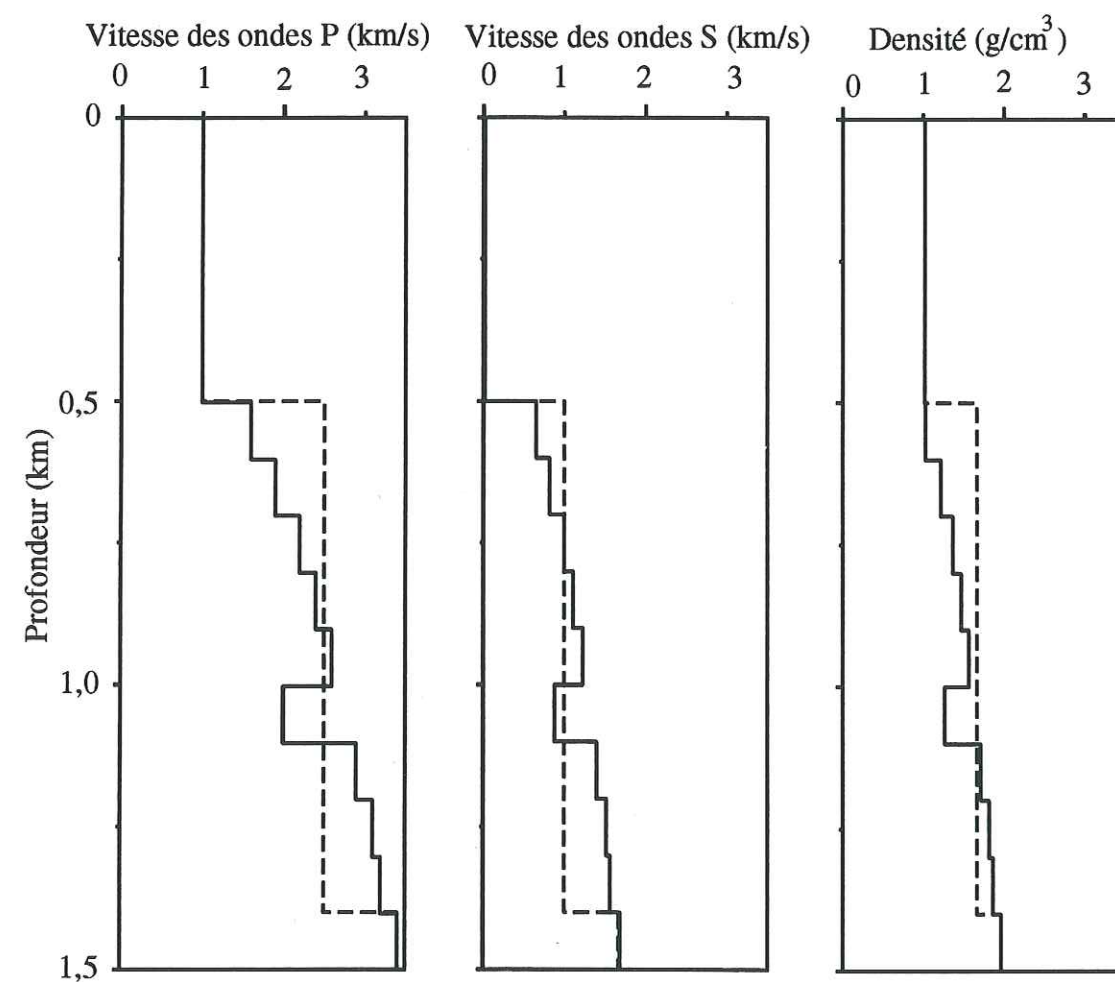


Fig 5.3.1: Profils des vitesses des ondes P, S et de la densité. On veut reconstruire le modèle vrai (trait continu) à partir du modèle de départ (tirets).

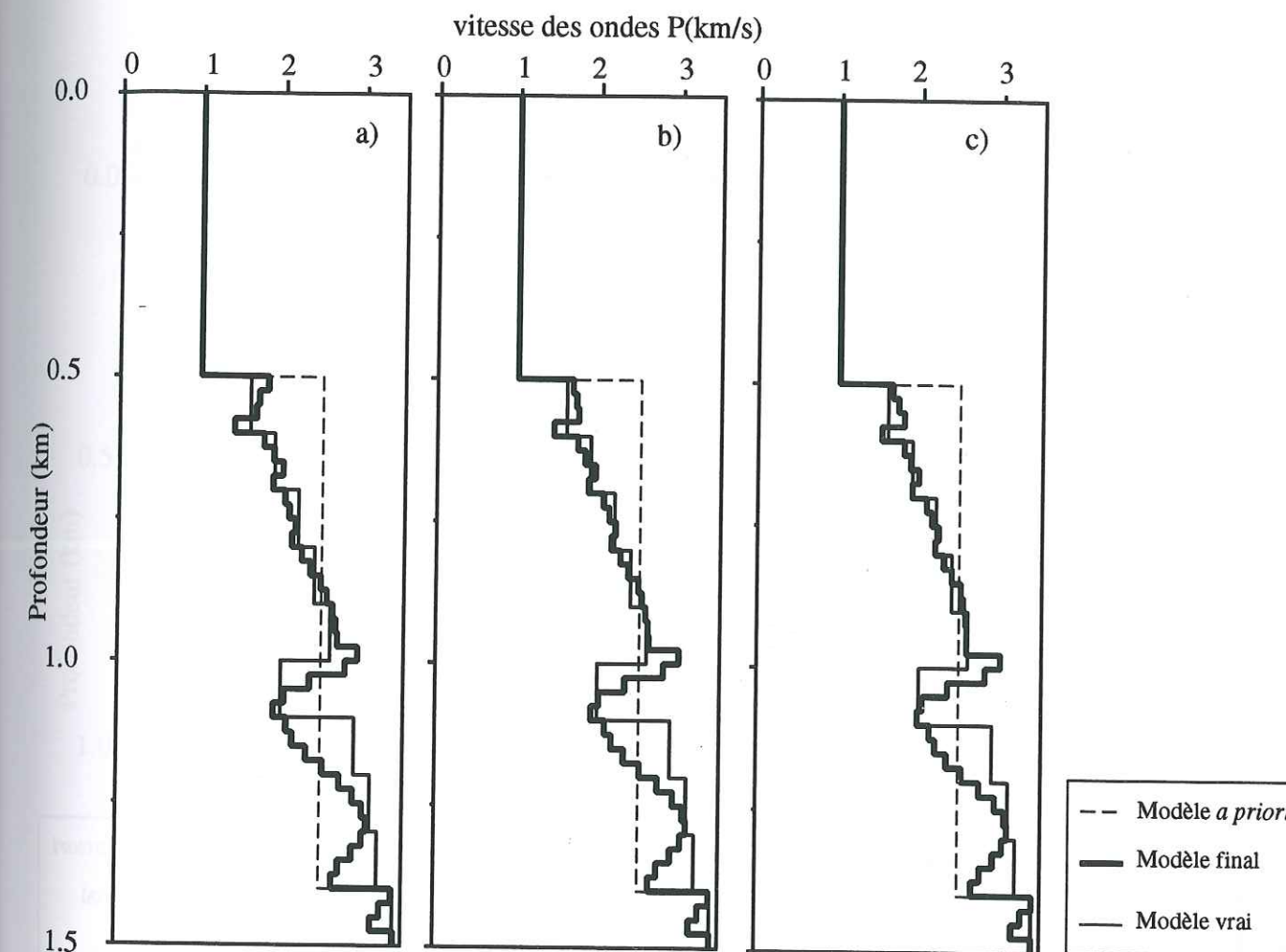


Fig 5.3.2: Profil de vitesse des ondes P obtenu en inversant l'impédance des ondes P selon les trois étapes suivantes:
 a) inversion à partir des 10 premiers récepteurs entre 100 mètres et 180 mètres
 b) inversion à partir des 30 premiers récepteurs entre 100 mètres et 340 mètres
 c) inversion à partir des 50 premiers récepteurs entre 100 mètres et 500 mètres

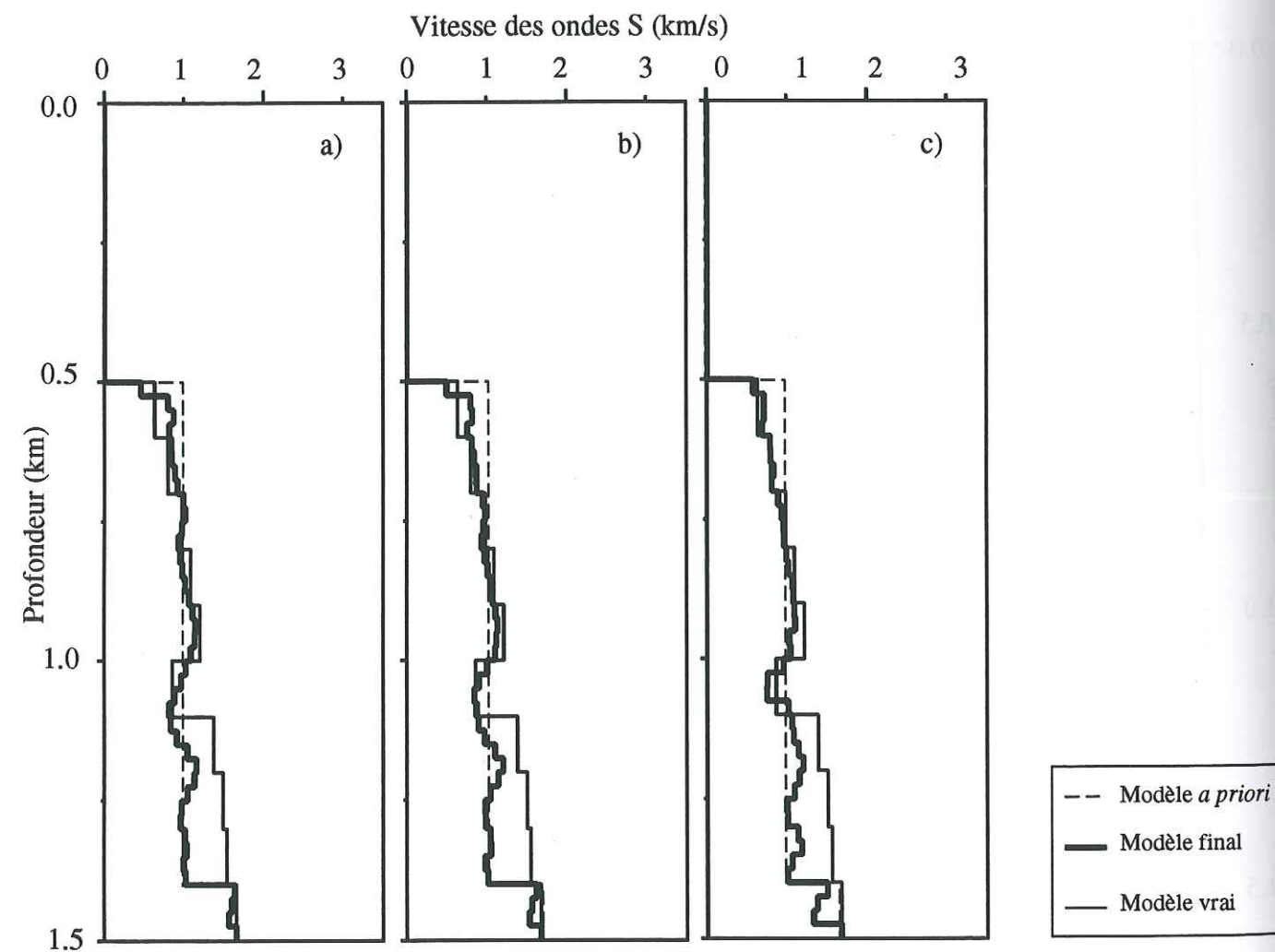


Fig 5.3.3: Profil de vitesse des ondes S obtenu en inversant l'impédance des ondes S selon les trois étapes suivantes:
 a) inversion à partir des 10 premiers récepteurs entre 100 mètres et 180 mètres
 b) inversion à partir des 30 premiers récepteurs entre 100 mètres et 340 mètres
 c) inversion à partir des 50 premiers récepteurs entre 100 mètres et 500 mètres

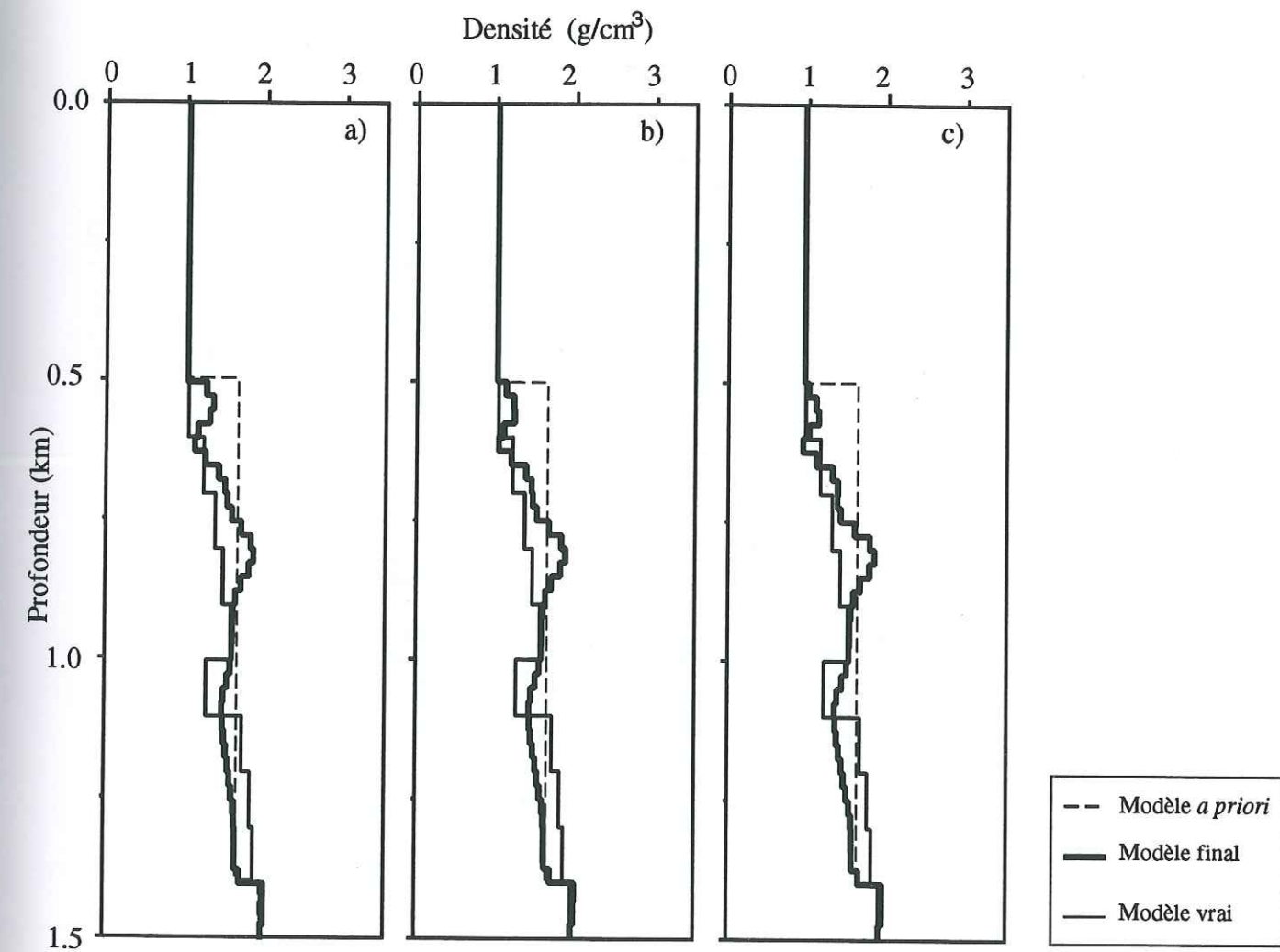


Fig 5.3.4: Le profil de densité est reconstruit d'après le modèle a priori en réalisant les trois étapes suivantes:
 a) inversion à partir des 10 premiers récepteurs entre 100 mètres et 180 mètres
 b) inversion à partir des 30 premiers récepteurs entre 100 mètres et 340 mètres
 c) inversion à partir des 50 premiers récepteurs entre 100 mètres et 500 mètres

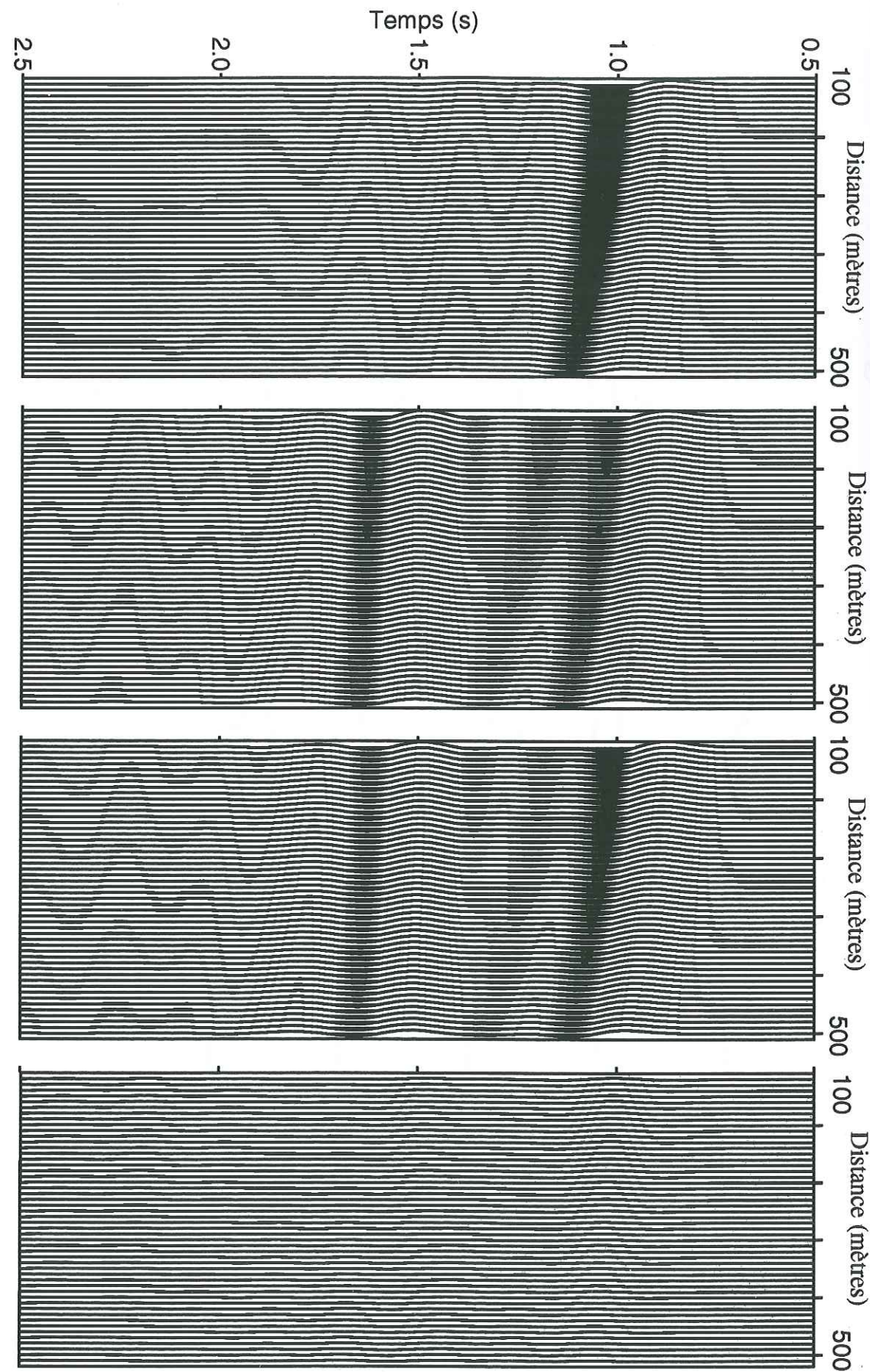


Fig 5.3.5: Composante verticale du déplacement pour une source ponctuelle impulsive selon la direction z. Réponses sismiques du modèle a priori (a), du modèle vrai (b) et du modèle final (c). Le résidu entre les sismogrammes obtenus pour le modèle final et le modèle vrai est déterminé en fin d'inversion (d). L'ensemble des traces est normalisé par rapport à la trace la plus énergétique.

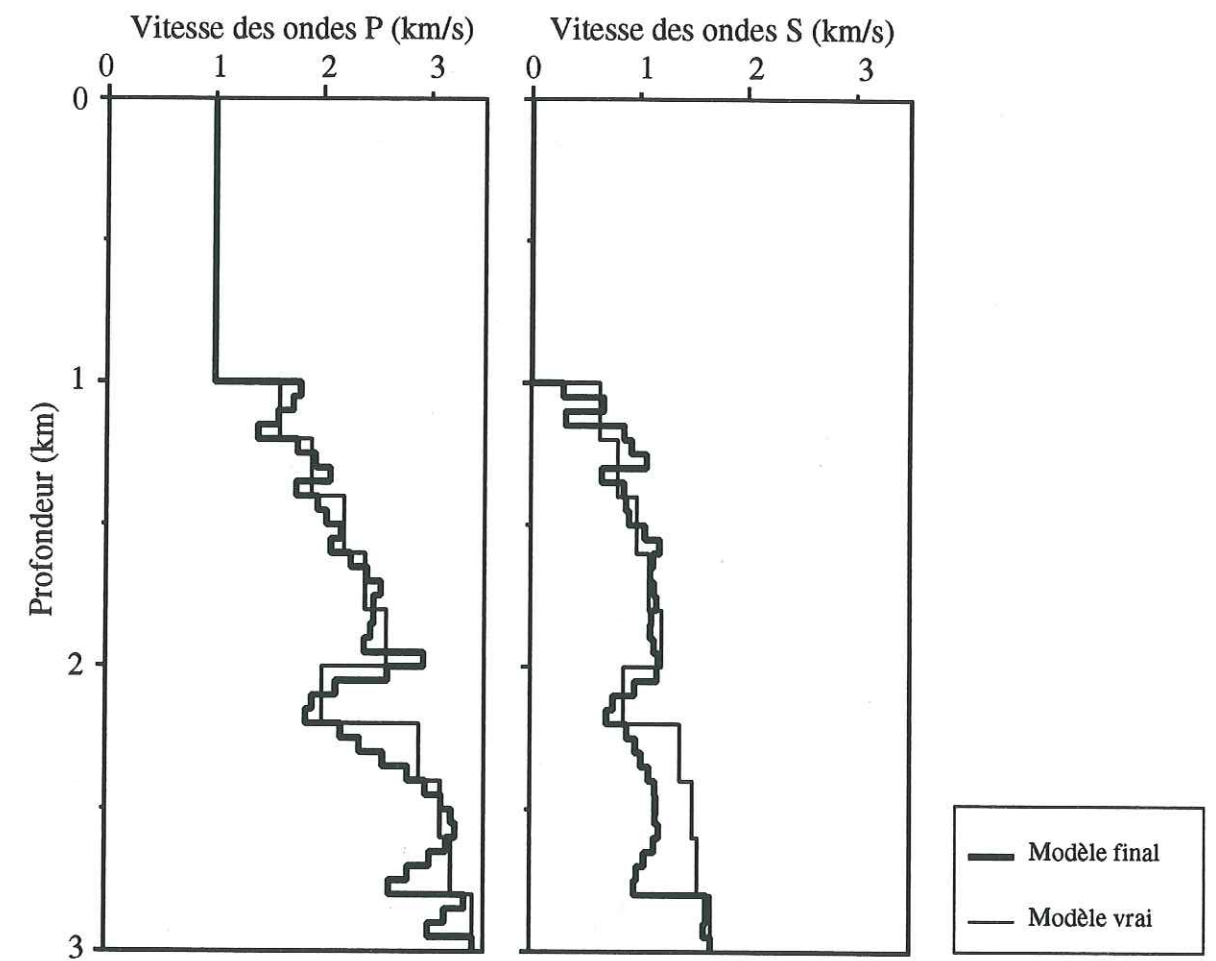


Fig 5.3.6: Résultats d'inversions obtenus pour une fréquence dominante du signal de 5.34 Hz. Le modèle a priori correspond au modèle final des figures 5.3.2 et 5.3.3

Seconde étape: les sismogrammes inversés correspondent aux 30 premiers récepteurs régulièrement espacés de 100 à 340 mètres.

Troisième étape: les sismogrammes inversés correspondent aux 50 récepteurs régulièrement espacés de 100 à 500 mètres.

Cette approche progressive donne de meilleurs résultats car elle permet une meilleure linéarisation du problème.

Les résultats de cette inversion correspondent aux figures 5.3.2, 5.3.3 et 5.3.4. Le gradient de vitesse au-dessus de la zone à faible vitesse est correctement inversé sur les profils des figures 5.3.2 et 5.3.3. Les résultats se dégradent en fonction de la profondeur là où les signaux sont de faibles amplitudes. En particulier, la zone à faible vitesse n'est pas correctement restituée. Comme le montre la figure 5.3.4 la densité est un paramètre mal inversé, comme cela a été observé dans des travaux antérieurs. Dans la suite du chapitre, nous nous limiterons à l'inversion de l'impédance des ondes P et de l'impédance des ondes S.

La figure 5.3.5 représente les sismogrammes synthétiques déterminés pour les modèles *a priori* (a) le modèle vrai (b) le modèle final (c) et le champ résiduel (d) déterminé en faisant la différence des sismogrammes calculés entre le modèle vrai et le modèle en fin d'itération. L'ensemble des traces est normalisé par rapport à la trace la plus énergétique des trois sections.

L'inversion explique bien les formes d'ondes puisque les résidus sont pratiquement nuls. Les coefficients de corrélation calculés en fin d'itération pour la première et la dernière trace sont de 98%. Néanmoins, la reconstruction du modèle est imparfaite.

Pour obtenir une meilleure résolution du modèle et une meilleure définition des brusques variations des paramètres, nous augmentons la fréquence dominante du signal de Ricker. Pour cela nous reprenons les résultats obtenus à la fin de la troisième étape. L'inversion est réalisée à partir des 50 récepteurs pour une fréquence dominante de 5.32 Hz. La densité n'est pas inversée. Les modèles de vitesse des ondes P et des ondes S, obtenus par inversion des impédances, sont représentés sur la figure 5.3.6. L'aspect général des modèles obtenus est moins lissé que pour les résultats précédents. Cependant, cette augmentation de la fréquence s'accompagne aussi d'une relative instabilité de la vitesse sur les modèles finaux par

rapport au modèle vrai. Pour retrouver des variations en marches d'escalier aussi brusques que celle présentes dans le modèle vrai il faudrait pouvoir travailler à des fréquences encore plus élevées en rappelant aussi que la non-linéarité des phénomènes physiques étudiés est plus importante aux hautes fréquences. Ainsi, pour stabiliser la vitesse, la meilleure stratégie consiste à inverser d'abord les basses fréquences des signaux sous de faibles angles d'incidences (petits déports entre source et récepteurs), puis à augmenter à la fois le contenu fréquentiel des signaux vers les hautes fréquences, et les angles d'incidences vers des valeurs plus importantes en incluant des sismogrammes enregistrés à des distances plus grandes. Cette façon de procéder garantit une évolution en douceur des modèles en limitant les risques d'échec dans l'inversion. Elle permet aussi d'inclure progressivement les contributions des ondes converties PS dans l'inversion pour estimer les vitesses ou impédances des ondes S.

IV. Comparaison de deux résultats d'inversion

A. Présentation

Pour valider le code de calcul, nous comparons nos résultats avec ceux obtenus par Gouveia (1996) pour le modèle simple présenté sur la figure 5.4.1. Ce modèle est constitué de 10 couches d'épaisseur constante égale à 10 mètres.

Gouveia calcul le problème direct par une méthode de réflectivité semblable à celle de Kennett, la méthode de Fuchs et Müller (1971). La fonction densité de probabilité est également assimilée à une fonction Gaussienne et minimisée par la technique des gradients conjugués présentée dans le chapitre précédent. Gouveia calcul la matrice des dérivées de Fréchet du problème en dérivant directement l'expression de la matrice de réflectivité exprimée pour une couche d'un milieu tabulaire par rapport aux paramètres du problème. L'expression de cette matrice a été introduite par Müller (1985). Cette technique est plus coûteuse en temps de calcul que la technique que nous proposons, mais elle ne fait pas intervenir l'approximation de Born (Gouveia, 1996, annexe A).

B. Résultats

Pour cette inversion, les 50 récepteurs sont régulièrement espacés à des distances comprises entre 100 et 500 mètres de la source et situés à la surface du modèle. A chaque

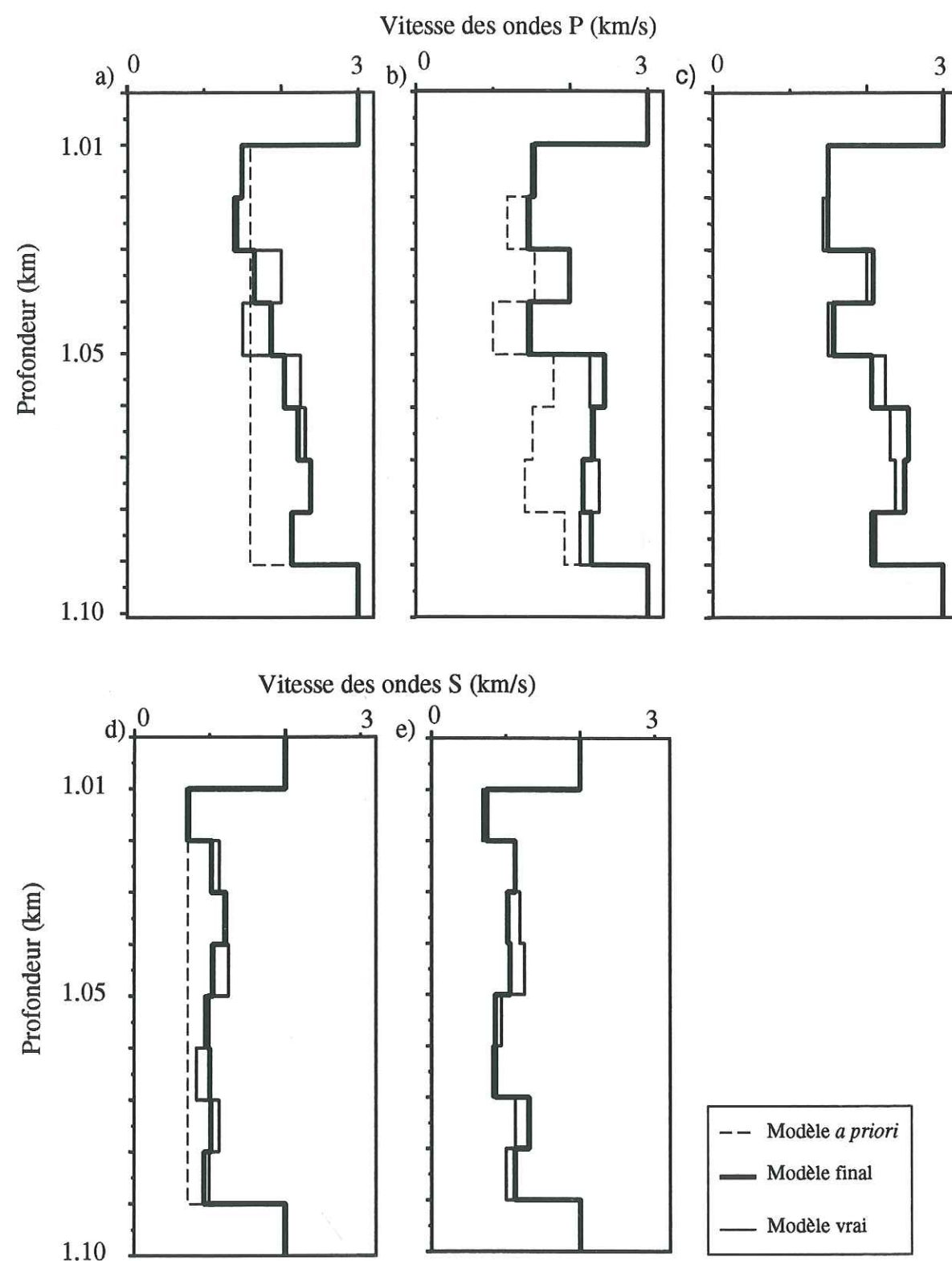


Fig 5.4.1: Inversion des impédances P et S. Représentation des profils de vitesse P (en haut) et S (en bas). Les profils de vitesse P a) et b) sont obtenus par notre méthode. Le profil de vitesse c) est obtenu par Gouveia. Le profil de vitesse S d) est obtenu par notre méthode. Le profil de vitesse e) est obtenu par Gouveia. Les modèles a priori utilisés par Gouveia sont des versions lissées des modèles vrais.

récepteur, nous avons calculé le déplacement vertical généré par une force ponctuelle verticale. La signature temporelle de cette source est un Ricker de fréquence dominante 10 Hertz. Nous ne considérons pas les réflexions à la surface libre ni les arrivées directes pour le calcul des formes d'ondes. La comparaison porte sur l'inversion des profils de vitesse des ondes P et S. Les résultats sont regroupés sur la figure 5.4.1.

En partant du modèle *a priori* de la figure 5.4.1b nous obtenons des résultats qui, quoique différents, sont comparables à ceux de Gouveia. Le modèle *a priori* retenu par Gouveia est une version lissée du modèle vrai ayant un profil non précisé dans le rapport C.W.P 210. Une vérification plus complète serait d'adopter le même modèle de départ pour comparer les résolutions en fin d'itérations. Cette application souligne la caractéristique importante de l'inversion en montrant à quel point la précision de la solution dépend du choix du modèle *a priori* retenu pour initier l'inversion (cf figures 5.4.1a et 5.5.1b).

V. Tests de robustesse de la méthode d'inversion

A. Présentation

Pour tester la robustesse de l'algorithme nous introduisons des erreurs dans les sismogrammes synthétiques calculés pour le modèle vrai. Lors du calcul de ces signaux synthétiques, nous considérons les trois erreurs suivantes:

Cas numéro 1: introduire des décalages en temps sur des traces sélectionnées de manière arbitraire, afin de simuler de manière simpliste des variations latérales d'épaisseur dans la première couche (erreur statiques).

Cas numéro 2: modifier la fréquence dominante du signal de Ricker des données synthétiques par rapport au signal utilisé dans les modélisations itératives des données, pour étudier les effets d'une mauvaise estimation du signal de la source.

Cas numéro 3: un cas simple de milieu latéralement hétérogène. Nous calculons les déplacements sur une ligne de récepteurs inclinée par rapport à l'horizontale. En négligeant les réflexions à la surface libre, cette géométrie simule un enregistrement de sismique réflexion d'un milieu stratifié penté à surface libre horizontale.

Ces erreurs sont appliquées aux synthétiques calculés pour le modèle vrai de la figure 5.3.1 (trait plein). Pour les cas n°1 et n°2, nous inversons les 10 premières traces calculées pour les récepteurs disposés à la surface de 100 à 180 mètres de la source. Pour le cas n°3 nous inversons les 20 premières traces calculées pour les récepteurs disposés de 100 à 360 mètres. Nous n'inversons que le paramètre d'impédance des ondes P, à partir de la composante verticale du déplacement. La source est une force ponctuelle verticale dont la signature temporelle est un signal de Ricker de fréquence dominante 2.66 Hz. Nous fixons à 9 le nombre d'itérations à effectuer lors de l'inversion. Le profil de vitesse du modèle *a priori* est le même que lors de l'étude menée dans le paragraphe III; il figure en pointillés sur la figure 5.3.1.

Pour chacun des tests réalisés, nous représentons les trois résultats suivants:

Ecart au synthétique vrai: pour chaque itération, nous traçons la variation de la somme des carrés des écarts entre les traces calculées pour le modèle à l'itération courante et les données synthétiques que l'on inverse.

Ecart au modèle vrai: pour chaque itération nous traçons la variation de la somme des écarts entre le modèle courant et le modèle vrai.

Profil de vitesse: au bout des 9 itérations, nous superposons le profil de vitesse des ondes P final, le profil de départ et le profil vrai. Nous représentons les vitesses en fonction du temps double de trajet de l'onde P dans le modèle à incidence normale.

Il faut préciser pour finir que pour effectuer tous ces tests, les inversions n'ont pas été menées jusqu'à leur terme afin de limiter le temps de calcul. Il en résulte une reconstruction imparfaite des modèles qui ne doit pas être considérée comme une faiblesse de la méthode. Les résultats obtenus sont néanmoins significatifs, car pour chacun des tests, les paramètres d'inversion sont restés strictement les mêmes pour mettre en évidence les tendances du processus d'inversion par rapport aux erreurs considérées.

B. Etude du cas n°1

La figure 5.5.1 montre des sections sismiques ayant subi des erreurs qui correspondent au premier cas. Nous décalons d'un même intervalle de temps les traces 2, 5 et 6 de chacune

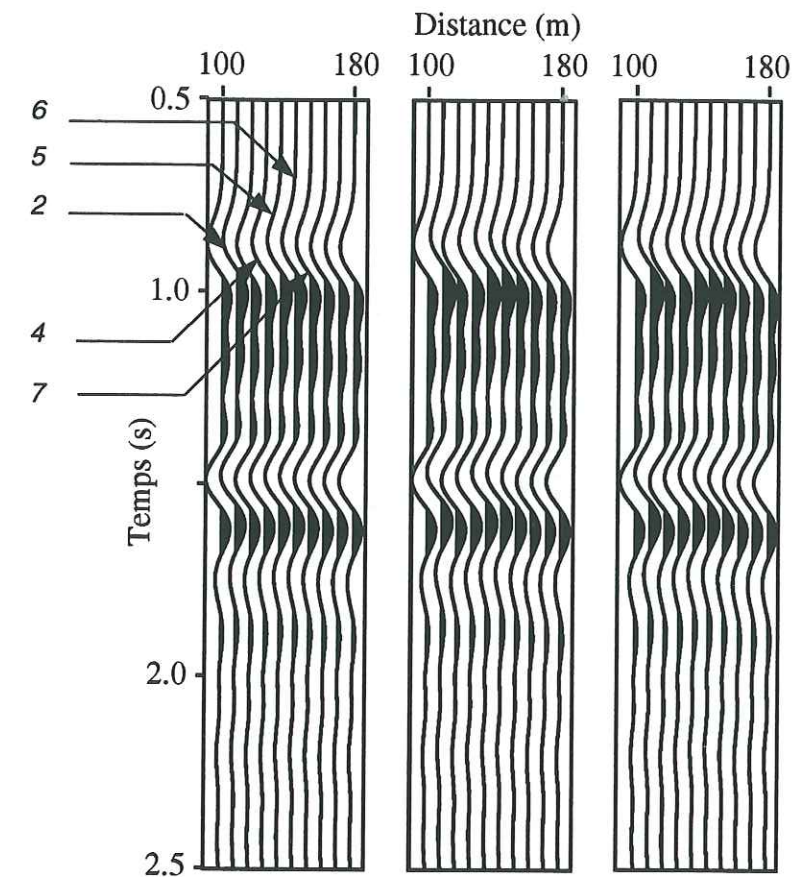


Fig 5.5.1: Les trois sections sismiques représentent les composantes verticales des déplacements calculés en imposant aux traces 2, 5, 6 un décalage temporel de (de gauche à droite) 0.005s, 0.010s et 0.015s, et en imposant aux traces 4, 7 un décalage temporel de 0.0025s, 0.005s et 0.010s de gauche à droite

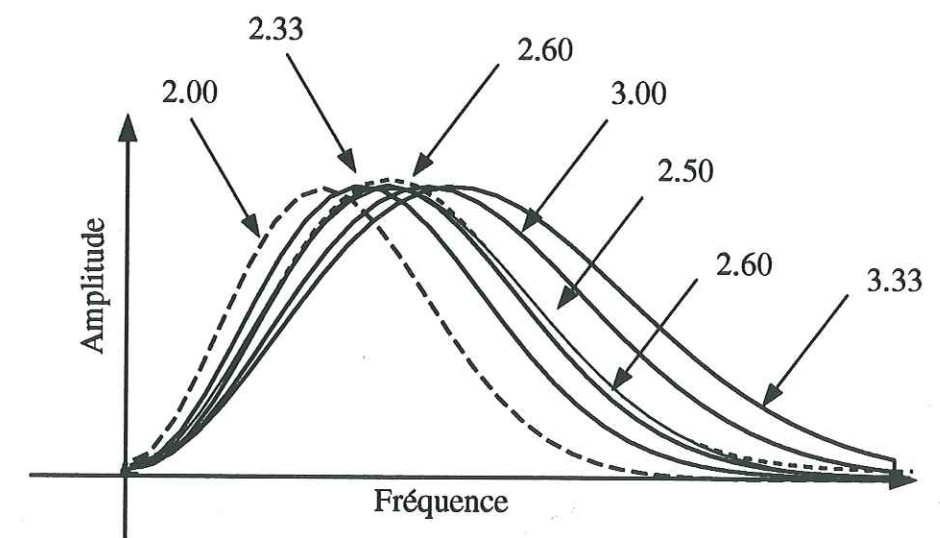


Fig 5.5.2: Spectre d'amplitude des signaux sources. Les fréquences indiquées correspondent à la fréquence dominante des signaux.

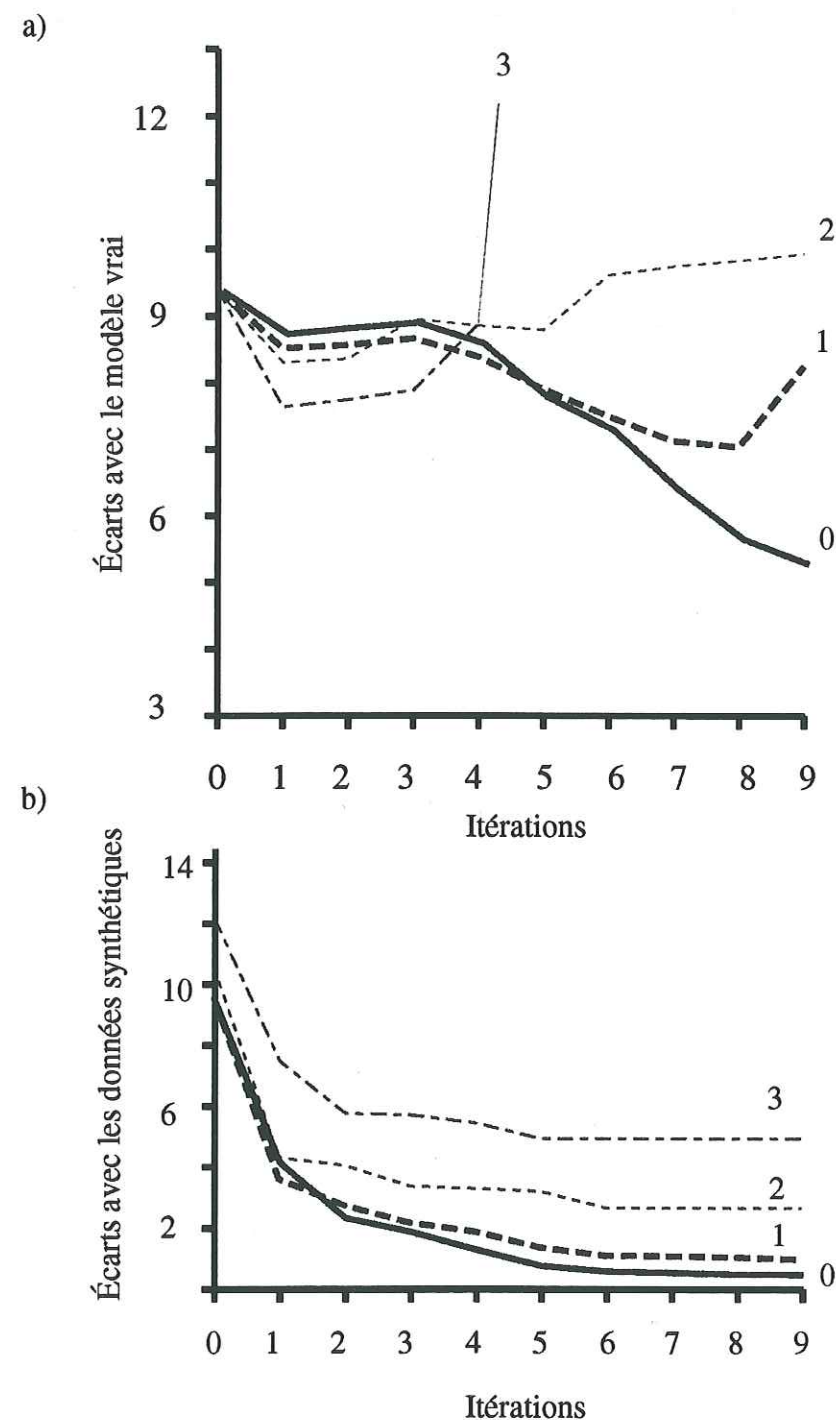


Fig 5.5.3: 4 séries de tests sont réalisées dans lesquelles on introduit un décalage statique aléatoire aux données synthétiques afin de tester la robustesse de l'inversion. Courbe 0: pas de décalage; courbes 1,2,3: décalages du tableau I
a) Variation de l'écart entre le modèle vrai et le modèle à l'itération i , i variant de 1 à 9 (courbe du bas). b) Variation de l'écart entre les synthétiques obtenus pour le modèle vrai, et celui obtenu pour le modèle à l'itération i .

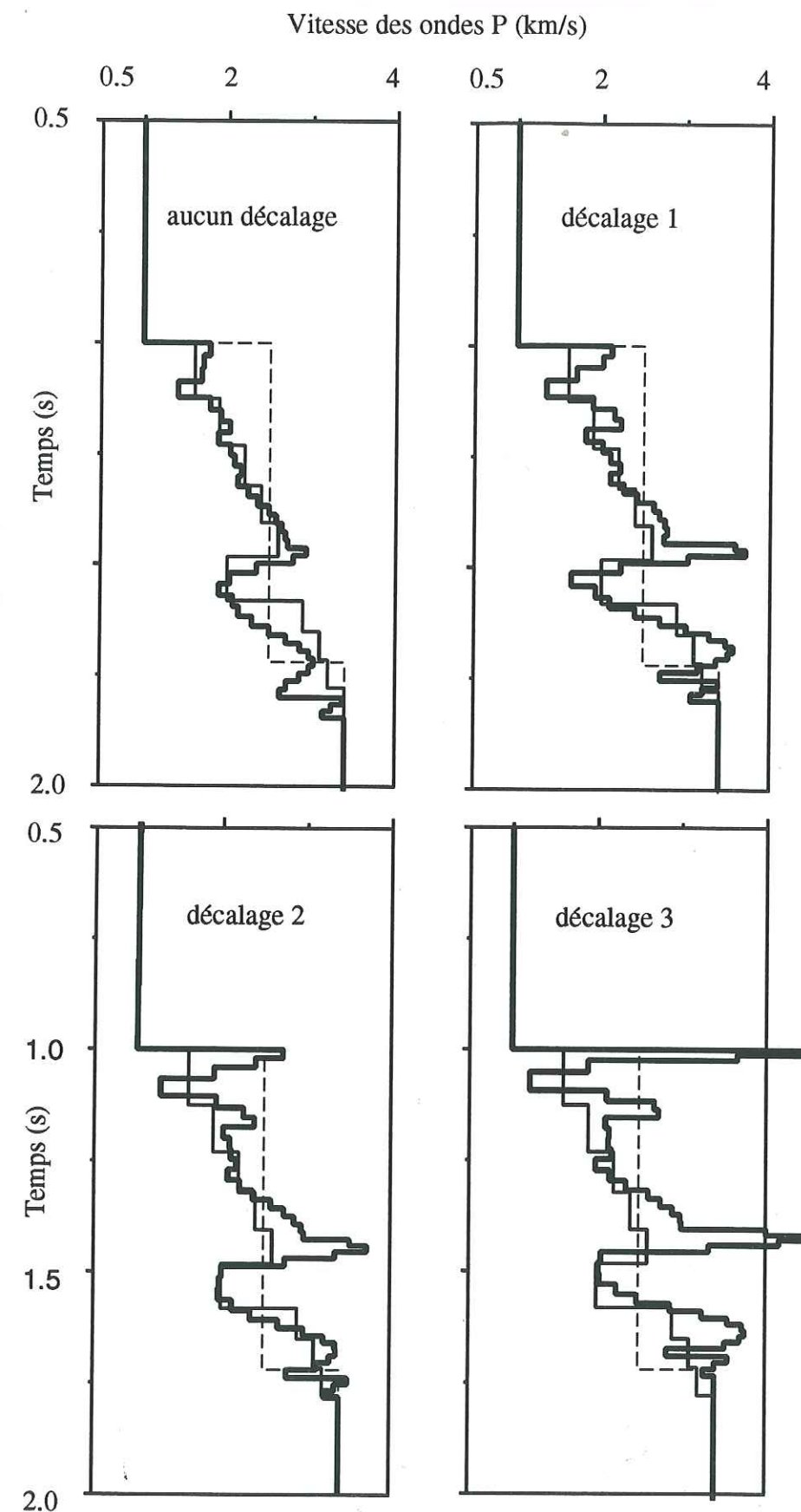


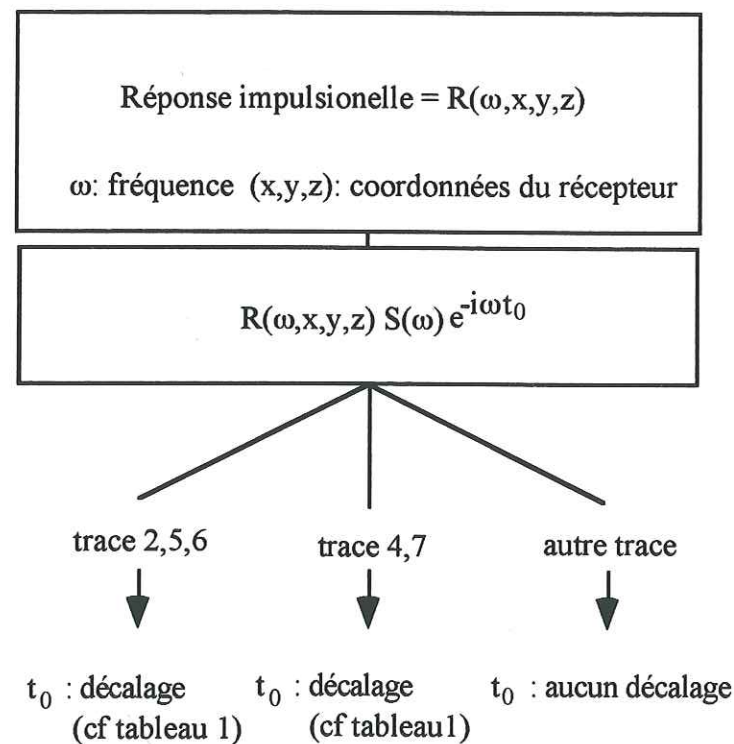
Fig 5.5.4: 4 séries d'inversion réalisées avec des données synthétiques vrais sont calculées en introduisant 4 décalages statiques aléatoires différents (cf tableau I). Les modélisations des données sont effectuées sans décalage statique. Les résultats sont obtenus pour 9 itérations et pour des récepteurs régulièrement disposés de 100 à 180 mètres.

des sections, et d'un autre intervalle les traces 4 et 7. Ces décalages sont regroupés dans le tableau ci dessous.

Tableau 1: Décalages temporels introduits sur les traces (figure 5.5.1).

	Section de gauche de la figure 5.5.1 décalage 1	Section du centre de la figure 5.5.1 décalage 2	Section de droite de la figure 5.5.1 décalage 3
Traces 4,7	0.0025sec	0.005sec	0.010sec
Traces 2,5,6	0.005sec	0.010sec	0.015sec

Le schéma suivant détaille la procédure retenue pour introduire le décalage temporel lors du calcul du sismogramme vrai:



La figure 5.5.3 (en haut) montre que les formes d'ondes peuvent toujours être ajustées, en ce sens que l'on tend toujours vers un minimum de la fonction. La réduction des écarts avec

les signaux synthétiques vrais est toujours très forte pour les premières itérations et se stabilise rapidement au bout de 5 itérations. Les coefficients de corrélation entre les traces sismiques obtenues avec le modèle *a priori* et les sismogrammes vrais ont été calculés. Le tableau ci-dessous donne la valeur de ces coefficients pour la première et la dernière trace.

Tableau 2: Valeurs des coefficients de corrélation entre les données synthétiques et les sismogrammes en fin d'inversion. Les coefficients sont calculés pour les 3 décalages considérés

	Coefficient de corrélation	
	première trace	dernière trace
Décalage numéro 1	93%	94%
Décalage numéro 2	87%	88%
Décalage numéro 3	81%	82%

Ces coefficients montrent clairement que les formes d'ondes sont moins bien inversées lorsque les décalages temporels sont importants. En effet, la correction de paramètre déterminée pour chacune des couches du modèle représente une valeur moyenne calculée à partir des informations collectées sur toutes les traces inversées. Les décalages temporels introduisent des incohérences dans les temps d'arrivées des phases. Compte tenu de la géométrie source-récepteurs, ces temps d'arrivées ne permettent plus de « caler » les hyperboles de réflexion théorique prévues par le modèle. De plus, en décalant les temps d'arrivées comme nous le faisons (décalages tous positifs), l'arrivée de la première phase est incohérente avec la vitesse dans la première couche. Comme les propriétés de cette couche ne sont pas inversées, les vitesses dans les couches suivantes sont surestimées. Elles le sont d'autant plus que les décalages sont importants.

La figure 5.5.3 (en bas) permet de suivre l'évolution des écarts entre les modèles obtenus à la fin de chaque itération et le modèle vrai. Cette évolution tend à prouver que les erreurs imposées à nos données synthétiques perturbent considérablement l'inversion. En effet, la figure 5.5.4 montre des variations rapides de la vitesse des ondes P. En particulier à 1.0 s et 1.4 s temps double, juste après la première couche et juste avant la zone à faible vitesse. Néanmoins, la pente du gradient se distingue toujours dans les cas numéros 1 et 2, et dans tous les cas considérés on distingue la zone à faible vitesse.

La méthode est finalement robuste en ce qui concerne ce type d'erreur si les décalages temporels restent modérés.

C. Etude du cas n° 2

On peut tenter d'inverser simultanément les caractéristiques de la source et les paramètres élastiques (Tarantola, 1984), mais en procédant de cette façon, les couplages entre le signal source et les propriétés du milieu rendent l'interprétation des résultats très incertaine. De ce fait, la plupart des inversions de données réelles séparent l'évaluation de la forme d'onde de l'estimation des propriétés du milieu. La méthodologie consiste à évaluer la fonction source par une méthode indépendante, et à utiliser ce signal dans les modélisations itératives. On peut aussi reconvoluer les données par un signal simple connu et utiliser ce même signal pour la résolution du problème direct.

Une mauvaise évaluation de la source introduit des distorsions dans le modèle inversé. Ces distorsions s'interprètent comme des réflecteurs virtuels. Pour préciser la robustesse de la méthode par rapport à ce problème, nous calculons les données synthétiques avec une fréquence dominante différente de celle utilisée dans les calculs de l'inversion des problèmes directs. Cette étude comporte 6 tests simulant une mauvaise estimation de la fonction source.

Tableau 3: Fréquences dominantes de l'ondelette de Ricker considérée pour les 6 tests réalisés avec les écarts relatifs par rapport à la valeur nominale de 2.66 Hz utilisée dans les calculs de modélisation.

	Test1	Test2	Test3	Test4	Test5	Test6
Fréquence	2.00Hz	2.33Hz	2.50Hz	2.60Hz	2.66	3.00Hz
Ecart	-25%	-12%	-6%	-2%	0%	+12%

La figure 5.5.5 a) montre une convergence des formes d'onde dans tous les cas étudiés, comme précédemment. Les coefficients de corrélation pour la première et la dernière trace sont regroupés dans le tableau ci-après:

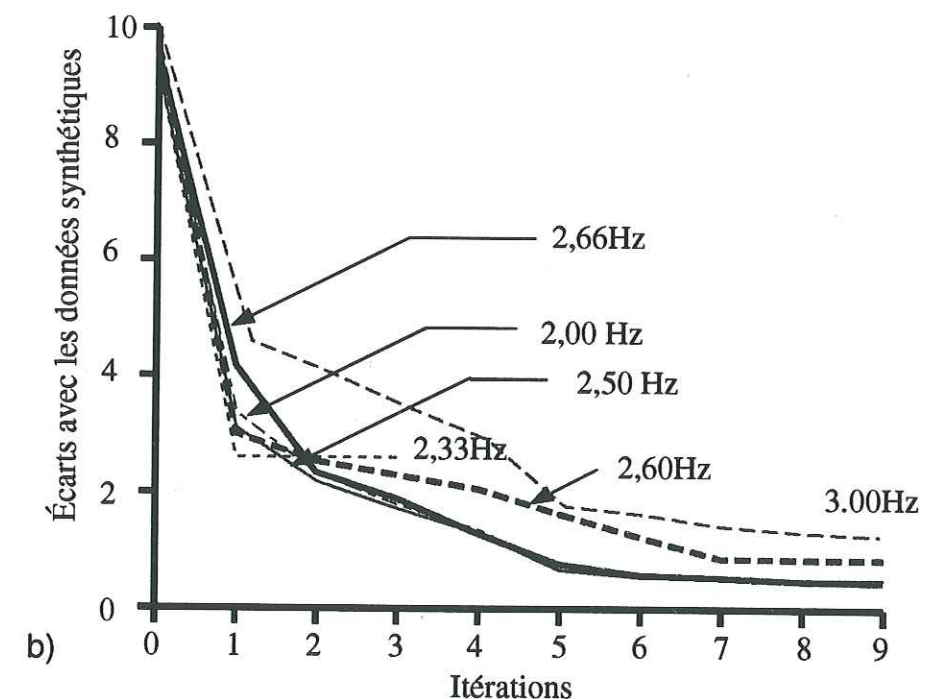
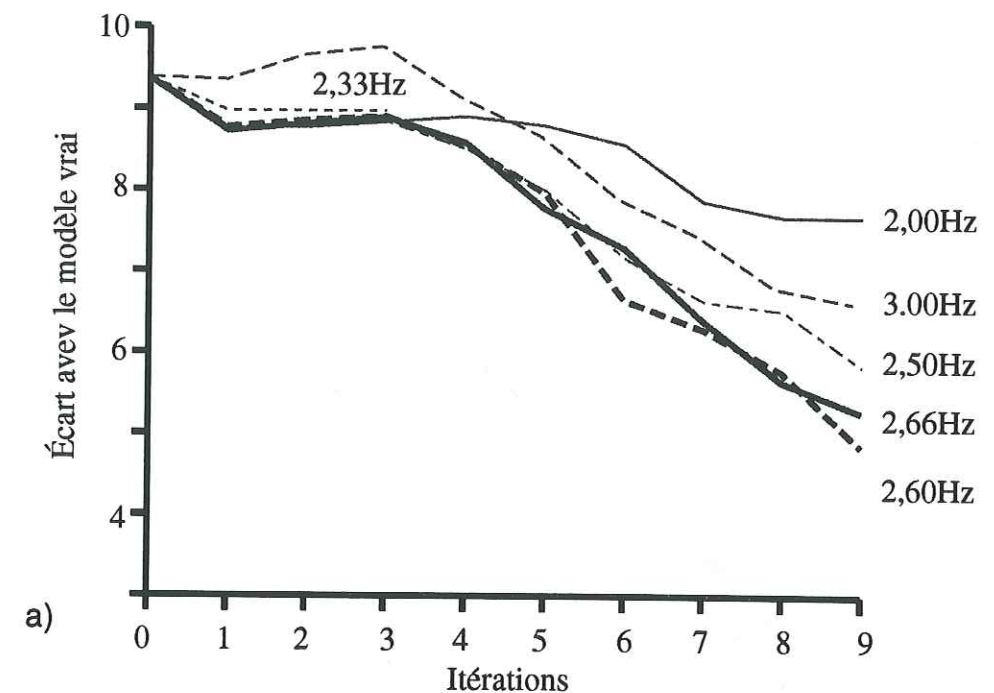


Fig 5.5.5: 6 séries de tests sont réalisées dans lesquelles on fait varier la fréquence dominante des données synthétiques en gardant constante la fréquence dominante des signaux synthétiques générés à chaque itération, égale à 2,66 Hz.
a) Variation de l'écart entre le modèle vrai et le modèle à l'itération i , i variant de 1 à 9 (figure du haut). b) Variation de l'écart entre les synthétiques obtenus pour le modèle vrai, et celui obtenu pour le modèle à l'itération i .

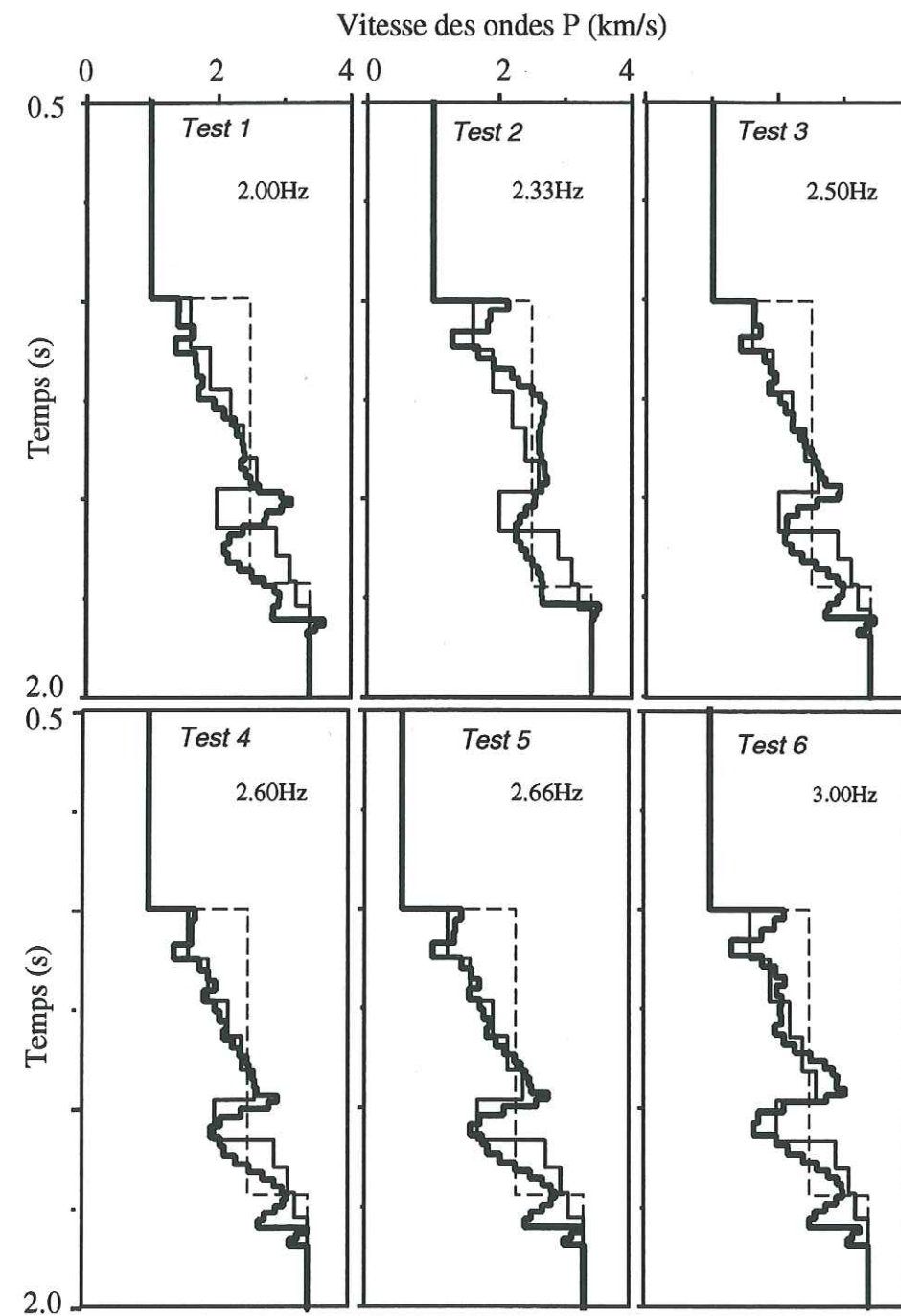


Fig 5.5.6: 6 séries d'inversion sont réalisées. Les données synthétiques sont calculées pour des fréquences dominantes de 2.00, 2.33, 2.50, 2.60, 2.66 et 3.00 Hz. Les signaux synthétiques lors de l'inversion sont calculés pour une fréquence dominante de 2.66 Hz. Les résultats présentés correspondent à 9 itérations et à 10 récepteurs régulièrement disposés entre 100 et 180 mètres.

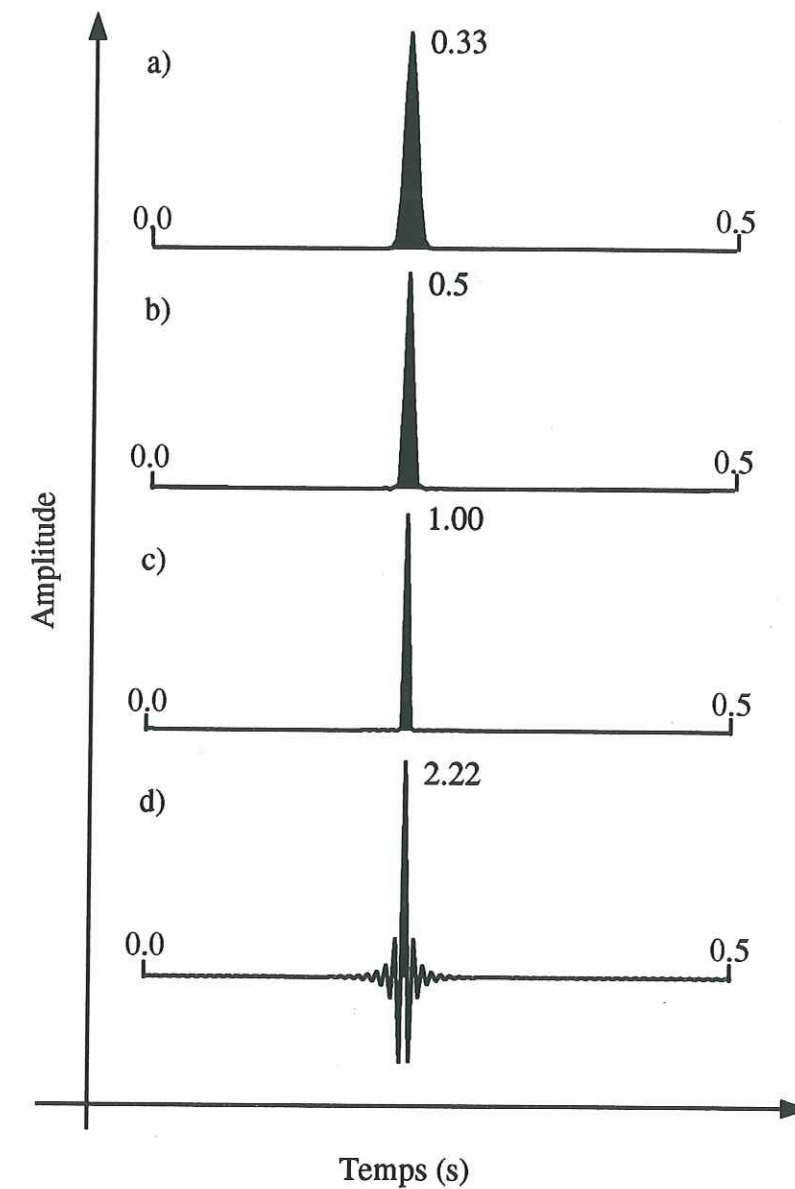


Fig 5.5.7: Signature temporelle des signaux ayant comme spectre d'amplitude $s(\omega)/s_1(\omega)$ tels que $s(\omega)$ représente le spectre d'un signal de Ricker de fréquence dominante 2.00 Hz (a) 2.33 Hz (b) 2.66 Hz (c) et 3.00 Hz (d). $s_1(\omega)$ représente le spectre d'un signal de Ricker de fréquence dominante 2.66 Hz. Pour chacun des pics l'amplitude est indiquée.

Tableau 4: Valeurs des coefficients de corrélation entre les données synthétiques et les sismogrammes en fin d'inversion pour les 6 tests effectués.

	Coefficient de corrélation	
	première trace	dernière trace
Test n° 1	87%	87%
Test n° 2	72%	72%
Test n° 3	93%	93%
Test n° 4	94%	94%
Test n° 5	94%	95%
Test n° 6	91%	91%

L'algorithme inverse de moins en moins bien les formes d'ondes lorsque les fréquences dominantes du signal de Ricker des données sont de plus en plus sous évaluées. Le tableau ci-dessus montre aussi que sur-estimer ou sous-estimer la fréquence dominante du spectre de la source n'a pas les mêmes effets puisque les coefficients de corrélation sont différents entre les tests 6 et 2.

La figure 5.5.6 permet de souligner les points suivants:

Les tests 3 et 4 n'affectent pas beaucoup le résultat final, ce qui signifie qu'une sous-estimation de la fréquence dominante inférieure à 6% est trop faible pour perturber les résultats.

Les tests 1 et 2 décalent exagérément la zone à faible vitesse vers le bas. En particulier, une sous-estimation de la fréquence dominante de 25% distord sérieusement le modèle de vitesse obtenu.

Le test 6, qui surestime la fréquence dominante de 12% est d'avantage conforme à la réalité. Ce test souligne également, pour les modèles cette fois, la dyssymétrie entre des variations relatives positives et négatives de même amplitude (12%).

La figure 5.5.7 représente les transformées de Fourier du rapport entre les spectres correspondants aux tests 1, 2, 5 et 6 et le spectre centré sur 2.66 Hz et permet d'interpréter

les résultats des figures 5.5.5 et 5.5.6. En effet, ces fonctions représentent le biais par lequel la réponse impulsionnelle est convoluée. Si on se place dans le domaine des fréquences, l'inversion revient à ajuster les données $R(\omega).S(\omega)$ où $R(\omega)$ représente la réponse impulsionnelle du milieu réel, et $S(\omega)$, le spectre complexe de la source. Le résultat de l'inversion est une fonction $RI(\omega).S1(\omega)$ où $RI(\omega)$ est la réflectivité estimée, et $S1(\omega)$ est le spectre complexe de la source utilisée pour la modélisation des données. Si celles-ci sont parfaitement ajustées, on a $R_i(\omega)S_i(\omega) \approx R(\omega)S(\omega)$ c'est-à-dire:

$$R_i(\omega) \approx R(\omega) \frac{S(\omega)}{S_i(\omega)}$$

La réflectivité estimée est une version filtrée de la réflectivité vraie. Si la fréquence dominante de $S(\omega)$ est inférieure à la fréquence dominante de $S1(\omega)$, le filtrage est du type passe-bas en fréquence; dans le cas contraire, le filtrage est du type passe-haut en fréquence. Les trois comportements suivants sont observés:

fig 5.5.7c: la source est parfaitement connue et l'inversion permet de retrouver le modèle de vitesse dans les meilleures conditions.

fig 5.5.7a et 5.5.7b: le produit de convolution « élargit » les pics de réflexion, ce qui signifie que les arrivées des différentes phases sont étalées sur un intervalle de temps plus grand. Les temps d'arrivée des phases les plus énergétiques ne sont plus correctement respectés.

fig 5.5.7d: Les temps d'arrivée des phases les plus énergétiques sont respectés, mais le bruit de Gibbs provenant du filtrage passe-haut d'une fonction échantillonnée perturbe le résultat final et se traduit par des oscillations hautes fréquences du modèle de vitesse.

En plus des distorsions en fréquences mentionnées ci-dessus, les modèles obtenus sont également affectés de problèmes d'amplitude agissant sur les contrastes de vitesse, qui suivant le cas, peuvent être sur-estimés ou sous-estimés (voir les amplitudes des opérateurs de filtrage sur la figure 5.5.7). Les contrastes ne sont correctement restitués que si l'amplitude du filtre vaut 1.

D. Etude du cas n° 3

Pour cette étude nous changeons le nombre et la position des récepteurs dans le calcul des données synthétiques, ainsi que la structure du modèle vrai et du modèle de départ. Ces modèles sont obtenus respectivement à partir des modèles vrai et *a priori* présentés sur la figure 5.3.1 dans lesquels nous modifions la profondeur des couches. L'épaisseur de la première couche est portée à 1 km; toutes les autres couches gardent les mêmes épaisseurs. Nous considérons 20 positions de récepteur pour cette étude. Le premier récepteur est à la même profondeur que la source c'est-à-dire à 500 mètres. Dans les différents tests effectués, les autres récepteurs sont disposés sur des lignes de pente variant de -35% à 35%, avec un pas régulier de 5%.

Les abscisses des récepteurs sont régulièrement espacées entre 100 et 340 mètres. Lorsque la pente est nulle, nous sommes dans la situation de l'étude menée dans le paragraphe III (puisque nous n'avons pas considéré les réflexions sous la surface libre). Nous inversons directement l'ensemble des sismogrammes calculés aux 20 récepteurs. Nous effectuons l'étude des 2 séries de huit tests suivants.

Tableau 5: Correspondance entre la numérotation du test effectué et la valeur de la pente de la ligne de récepteurs par rapport à l'horizontale. La première série de tests concerne des pentes d'inclinaisons positives la deuxième série de tests concerne des pentes d'inclinaisons négatives.

1 ^{ère} série	Test1	Test2	Test3	Test4	Test5	Test6	Test7	Test8
Pente	0%	5%	10%	15%	20%	25%	30%	35%

2 ^{nde} série	Test1	Test2	Test3	Test4	Test5	Test6	Test7	Test8
Pente	0%	-5%	-10%	-15%	-20%	-25%	-30%	-35%

Cette étude simule des enregistrements de sismique réflexion dans un milieu 1-D tabulaire dans lequel les récepteurs sont en surface et les couches sont inclinées d'une valeur égale aux pourcentages indiqués. En revanche, le modèle est supposé à stratification plane et horizontale pour chacune des inversions réalisées, et la ligne de récepteurs est parallèle à la stratification.

La figure 5.5.8 montre les sections sismiques que l'on inverse pour les pendages considérés. La vitesse apparente des arrivées réfléchies est d'autant plus faible que le pendage

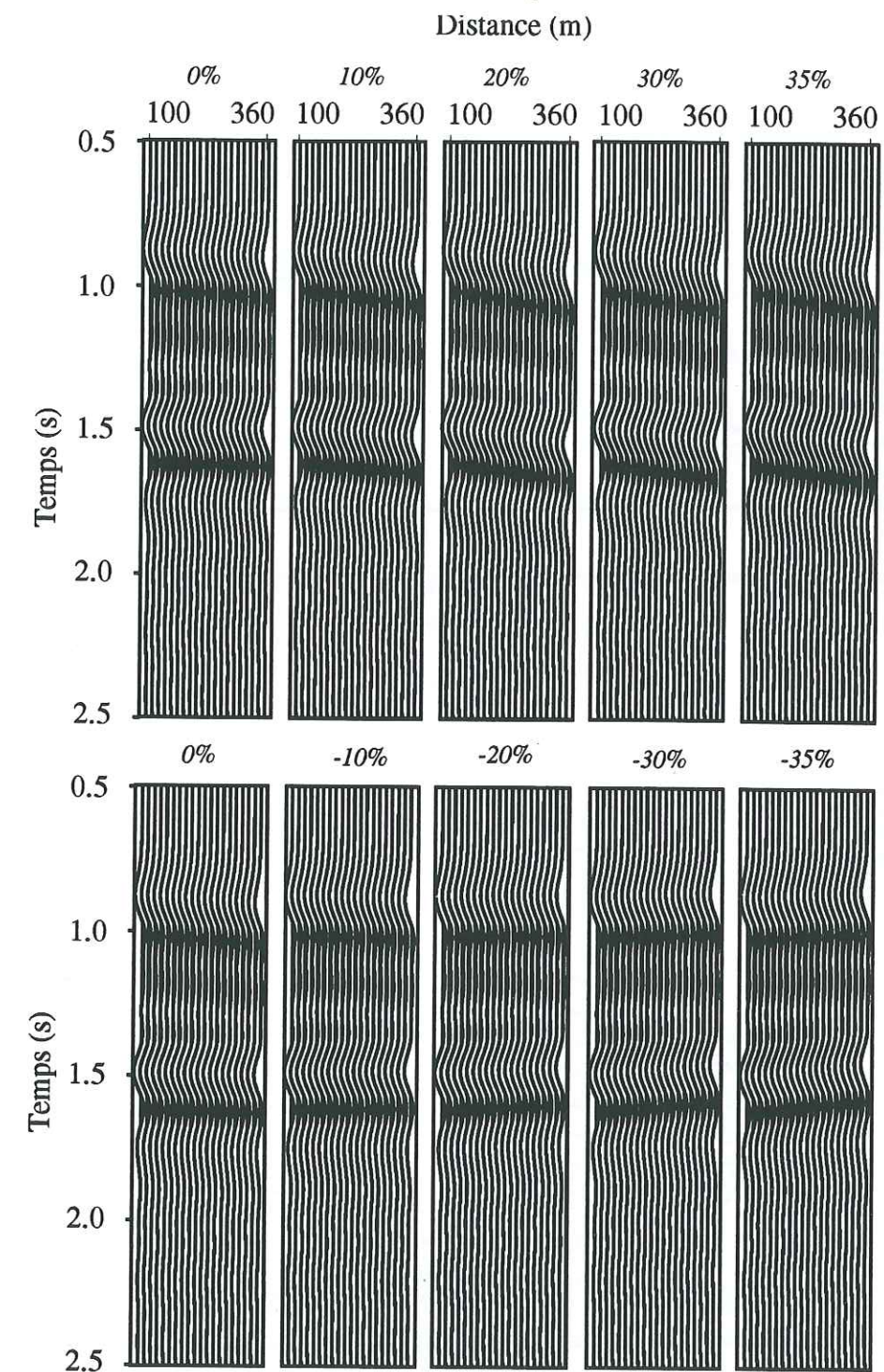


Fig 5.5.8. Les 10 sections sismiques représentent les composantes verticales des déplacements calculés pour un modèle monoclinale de pendage (de gauche à droite en haut) 0%; 10%, 20%, 30%, 35%. (de gauche à droite en bas) 0%, -10%, -20%, -30%, -35%. Le modèle considéré est déduit du modèle figure 5.3.1, la profondeur de la première couche est égale à 1000 mètres.

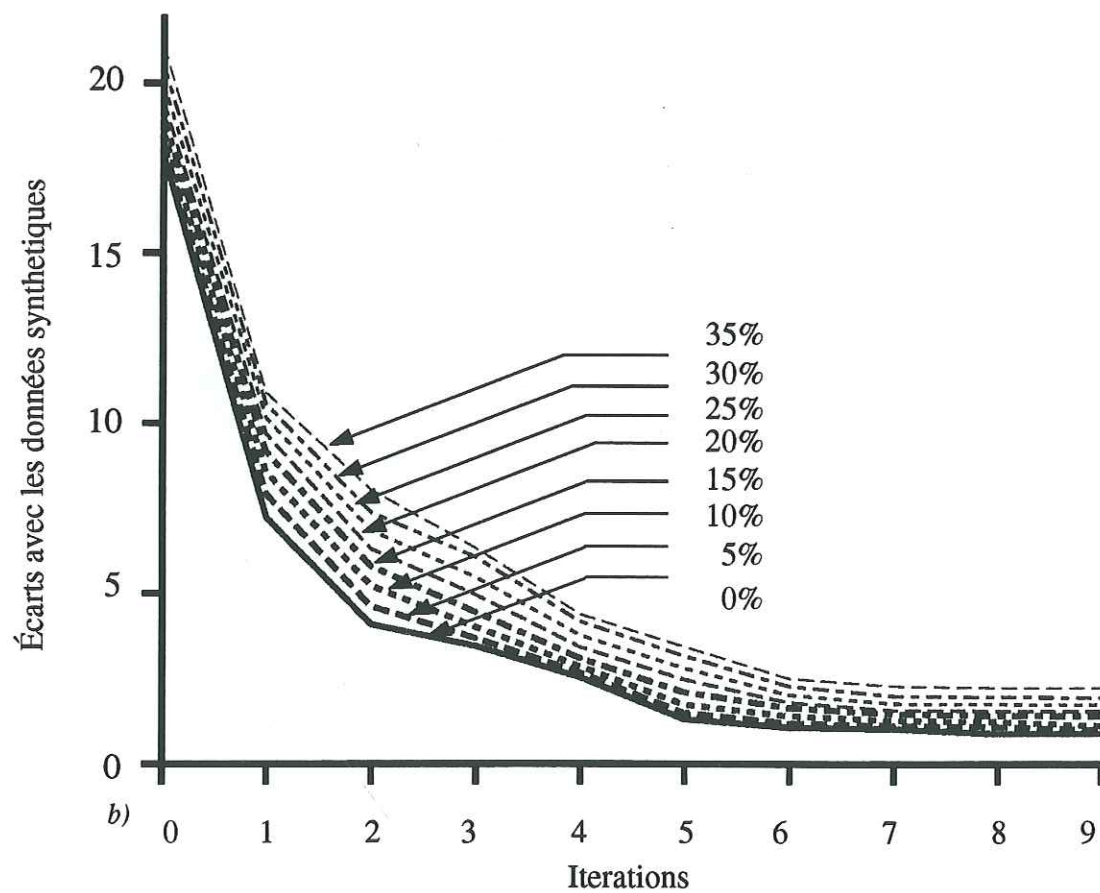
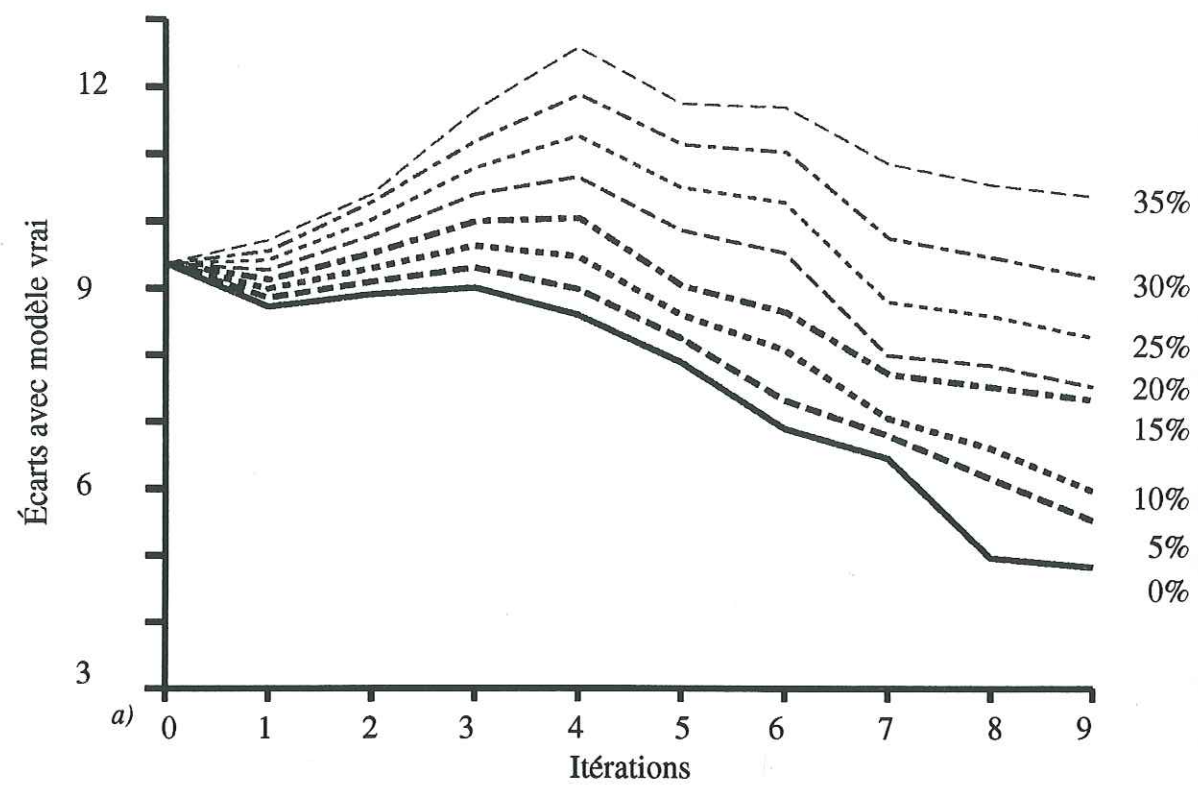


Fig 5.5.9: a) Variation des l'écarts entre le modèle vrai et le modèle à l'itération i , i variant de 1 à 9. b) Variation des écarts entre les données synthétiques et les sismogrammes synthétiques obtenus à l'itération i .

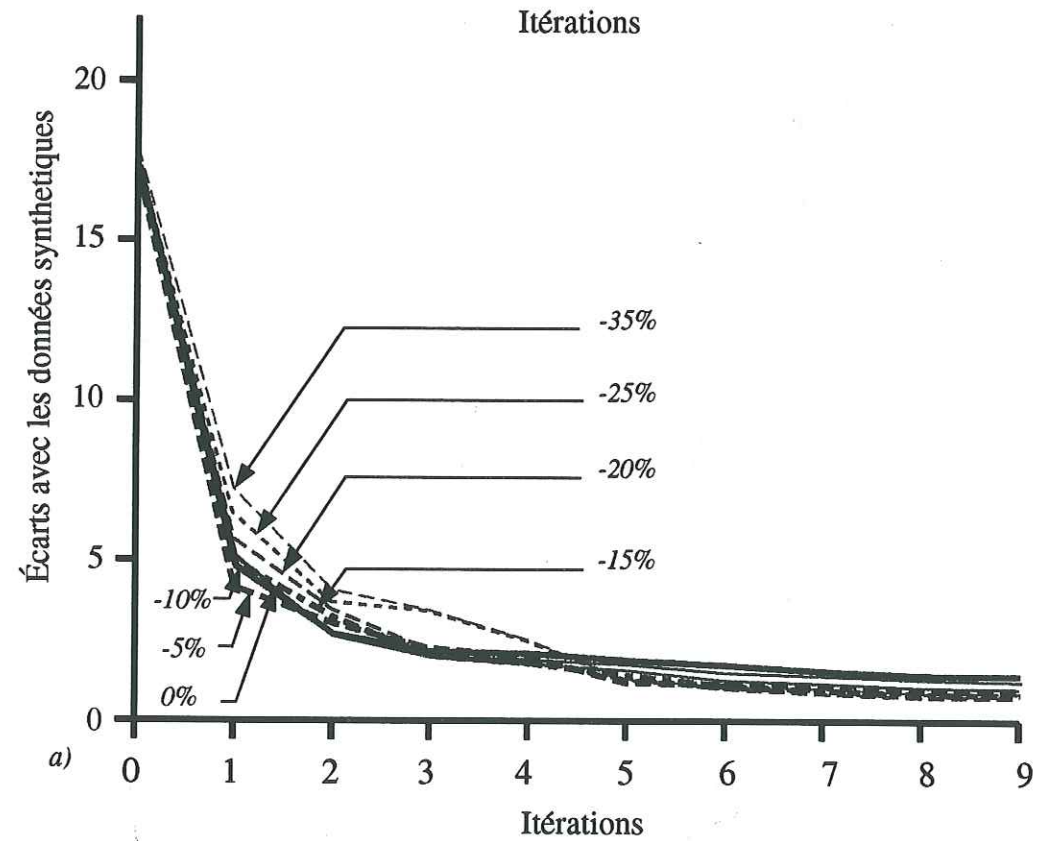
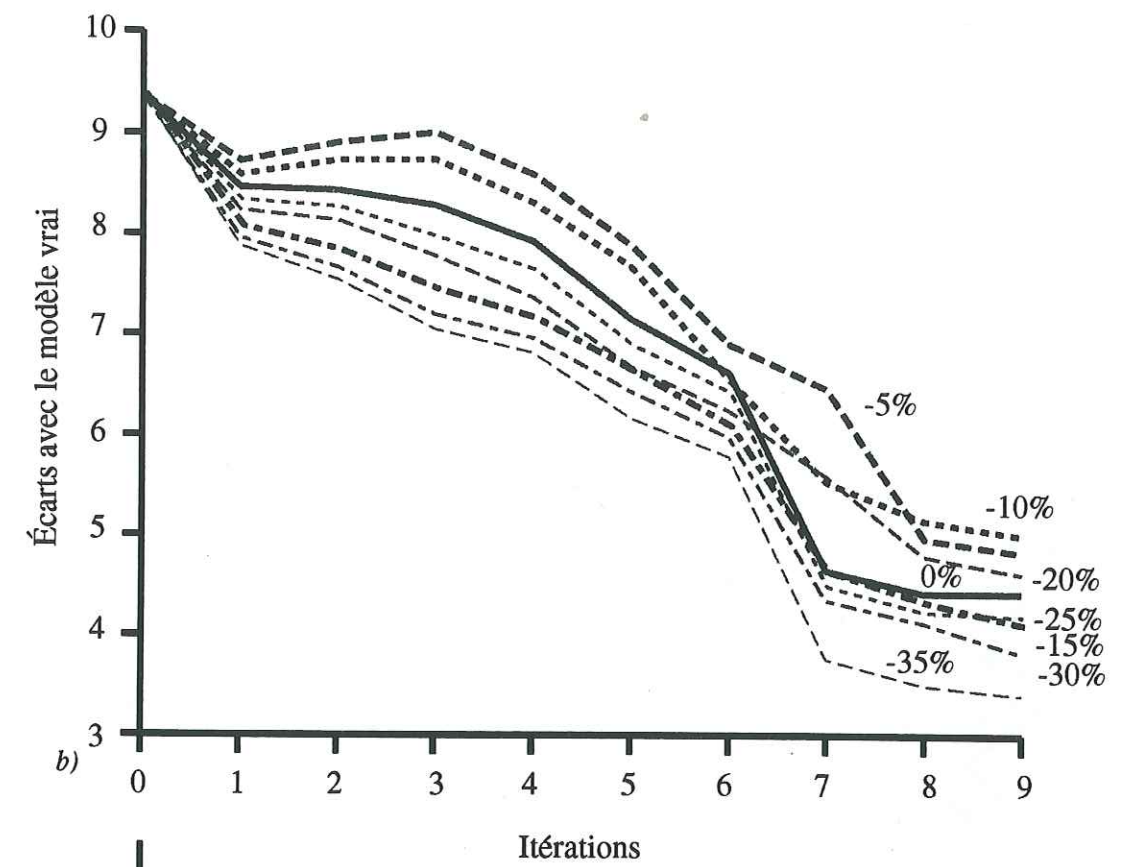


Fig 5.5.10: a) Variation des l'écarts entre le modèle vrai et le modèle à l'itération i , i variant de 1 à 9. b) Variation des écarts entre les données synthétiques et les sismogrammes synthétiques obtenus à l'itération i .

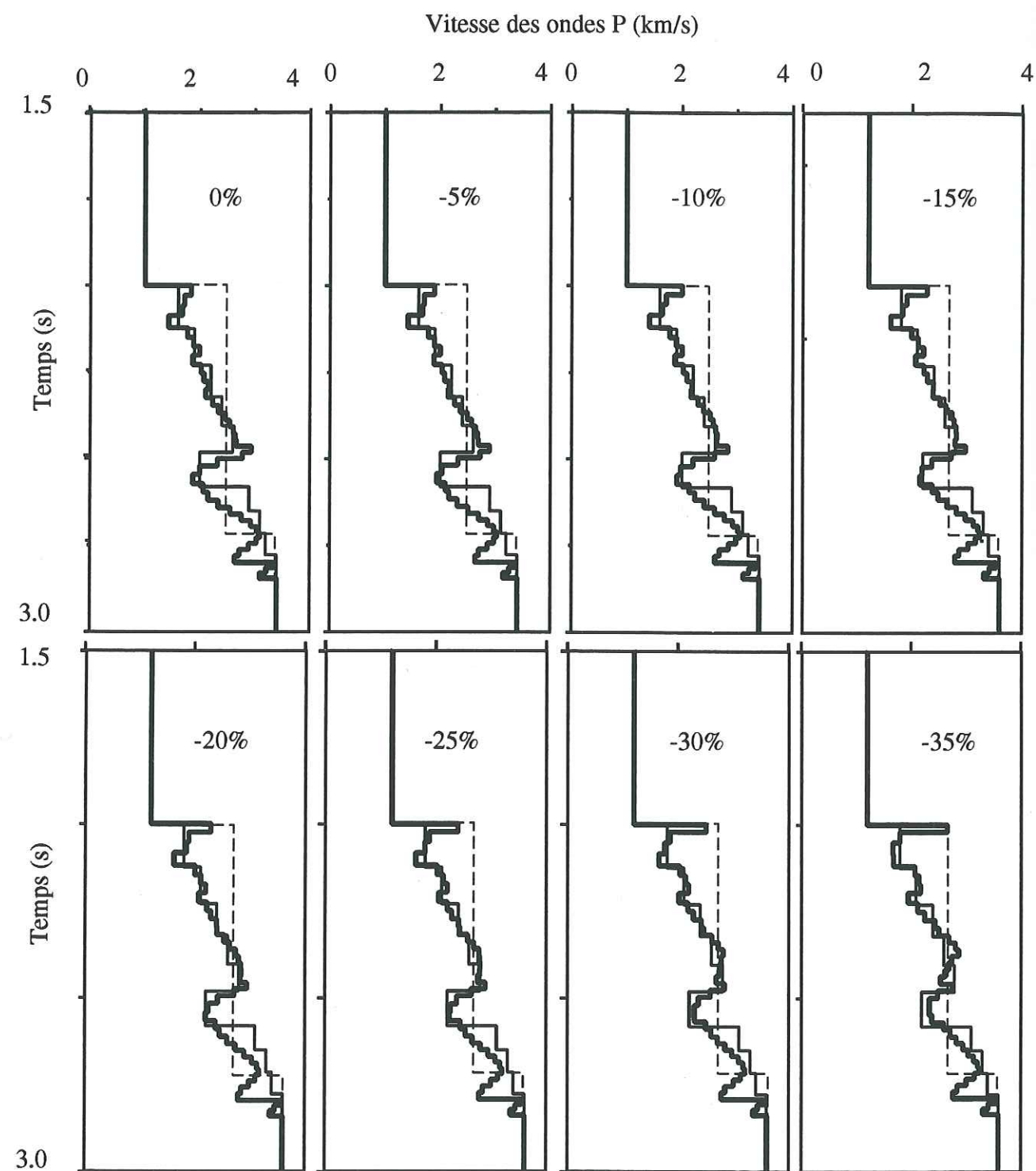


Fig 5.5.12: Comparaison des modèles estimés après 9 itérations pour les différents pendages positifs considérés. Les pourcentages indiquent les pendages des couches du modèle vrai.

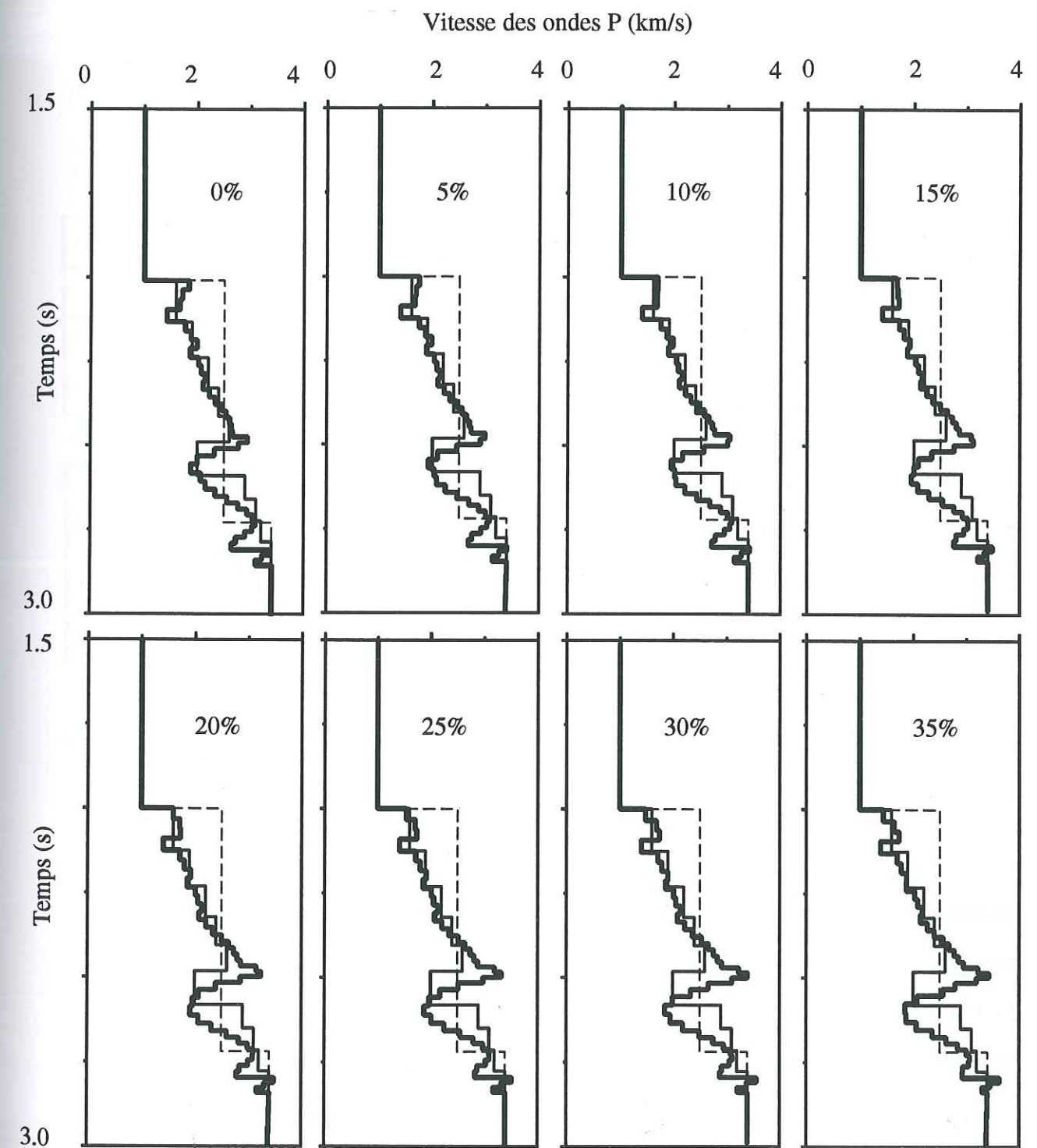


Fig 5.5.11: Comparaison des modèles estimés après 9 itérations pour les différents pendages positifs considérés. Les pourcentages indiquent les pendages des couches du modèle vrai.

est plus important avec des pentes d'inclinaisons positives. Cette tendance est inversée pour des pendages d'inclinaisons négatives.

Les figures 5.5.9b et 5.5.10b montrent que les écarts entre les sismogrammes calculés et les données synthétiques diminuent régulièrement dans tous les cas. Les coefficients de corrélation des formes d'ondes pour les premières et dernières traces en fin d'inversion sont regroupés dans le tableau ci-dessous:

Tableau 6: Valeurs des coefficients de corrélation entre les données synthétiques et les sismogrammes en fin d'inversion (premières et dernières traces). Les coefficients sont calculés pour toutes les pentes considérées.

1 ^{ère} série	Test1	Test2	Test3	Test4	Test5	Test6	Test7	Test8
trace n°1	94%	93%	93%	92%	91%	90%	88%	86%
trace n°20	95%	93%	91%	87%	85%	82%	79%	75%

2 ^{nde} série	Test1	Test2	Test3	Test4	Test5	Test6	Test7	Test8
trace n°1	94%	94%	94%	93%	92%	92%	91%	89%
trace n°20	95%	95%	95%	93%	91%	88%	84%	80%

Les résultats d'inversion se dégradent lorsque le pendage des couches augmente, positivement ou négativement, ce à quoi on pouvait s'attendre. La dégradation du coefficient de corrélation est néanmoins plus rapide pour la première série. Les différences selon le signe de l'inclinaison du pendage sont beaucoup plus évidentes sur les figures 5.5.9a) et 5.5.10a) qui montrent que les écarts entre les modèles estimés et le modèle vrai diminuent plus vite lorsque la pente est négative. L'analyse des figures 5.5.11 et 5.5.12 va permettre de mieux comprendre ces différences. La présentation séquentielle des résultats pour les pentes positives (fig 5.5.11) et négatives (fig 5.5.12) permet de faire les constatations suivantes:

Un pendage inférieur ou égal à 15% pour les deux séries considérées a relativement peu d'effets sur les modèles reconstruits.

Pour les pendages d'inclinaisons positives, la zone à faible vitesse reconstruite est mal positionnée en profondeur (trop profonde).

Pour les pendages d'inclinaisons négatives, les effets produits sont inverses. En effet, la zone à faible vitesse reconstruite apparaît presque à sa place.

Dans tous les cas, les vitesses dans les couches 2, 3, 4, et 5 du modèle vrai sont bien reconstruites.

Le pendage des couches modifie les courbures des hyperboles de réflexion sur les sismogrammes (cf fig 5.5.8). Les vitesses de propagation sont donc adaptées en fonction de ces courbures et sont de ce fait mal évaluées. Avec le modèle considéré, les écarts entre le modèle reconstruit et le modèle vrai diminuent pour des pendages négatifs car la zone à faible vitesse est mieux reconstruite que dans le cas de pente nulle. Dans les deux séries étudiées, (figures 5.5.11 et 5.5.12) on montre que les modèles estimés dans les cas 2 à 8 s'écartent régulièrement du modèle estimé dans le cas n°1 (pas de pendage). Il semble qu'un pendage de 15% soit, dans les deux séries étudiées, une limite raisonnable à une reconstruction correcte du modèle à stratification plane et horizontale. Cette conclusion dépend évidemment de la géométrie considérée. Dans notre cas, le dernier récepteur se situe à une distance de la source de l'ordre de la demi-longueur d'onde du signal. Si cette distance était plus grande, ou si le contenu fréquentiel des signaux était plus élevé, nous constaterions certainement une dégradation plus importante encore.

VI. Modèle à couches fines

Jusqu'à présent notre technique d'inversion considérait des enregistrements en surface obtenus avec une source en surface. La méthode permet cependant de considérer différentes géométries sources-récepteurs, et n'exclut pas de placer la source à une profondeur différente de celle des récepteurs. Ainsi, il est possible de simuler des profils OBS, mais aussi des profils sismiques verticaux en adaptant la position de la source selon le cas étudié. L'étude suivante consiste non seulement à appliquer la méthode à un modèle marin réaliste en inversant des profils sismiques synthétiques de type OBS, mais aussi à faire varier la profondeur de la source en la plaçant à l'intérieur des couches sédimentaires.

A. Description du modèle

1. Modèle vrai

Nous prenons un modèle marin complexe, construit à partir d'un log sonique. La vitesse des ondes S est déduite de la vitesse des ondes P en supposant un coefficient de Poisson constant à toutes les profondeurs et égal à 0.25. Ce modèle est celui utilisé dans le paragraphe III.2 de l'article présenté dans le chapitre 3. Nous nous proposons d'inverser les paramètres des 228 premières couches de ce modèle. Chaque couche possède une épaisseur constante de 4 mètres. La figure 5.6.1 montre les profils des vitesses des ondes P et S, et les densités.

2. Modèle *a priori*

Le modèle de départ utilisé dans l'inversion est une version lissée du modèle vrai. La valeur d'un paramètre du modèle, caractérisant une couche donnée, correspond à la moyenne des valeurs de ce paramètre dans les n couches les plus proches. Dans cette étude, le lissage a été effectué pour une valeur de n égale à 11, c'est-à-dire on lisse les paramètres à partir des 5 couches de part et d'autre de la couche considérée (cf fig 5.6.1)

B. Résolution

La source est d'abord placée sur le fond de l'eau. Nous disposons régulièrement 50 récepteurs en surface. Les distances horizontales séparant la source du premier et du dernier récepteur sont respectivement 100 et 500 mètres. La fréquence dominante du signal de Ricker utilisé est de 30 Hz. Nous voulons inverser l'impédance des ondes P selon les trois étapes suivantes:

Première étape: nous considérons la partie de la section comprise entre 0.5 et 1.0 seconde pour 10 premiers récepteurs.

Deuxième étape: nous considérons la partie de la section comprise entre 0.5 et 1.5 seconde pour ces mêmes traces.

Troisième étape: nous considérons le même intervalle de temps pour les 20 premiers récepteurs.

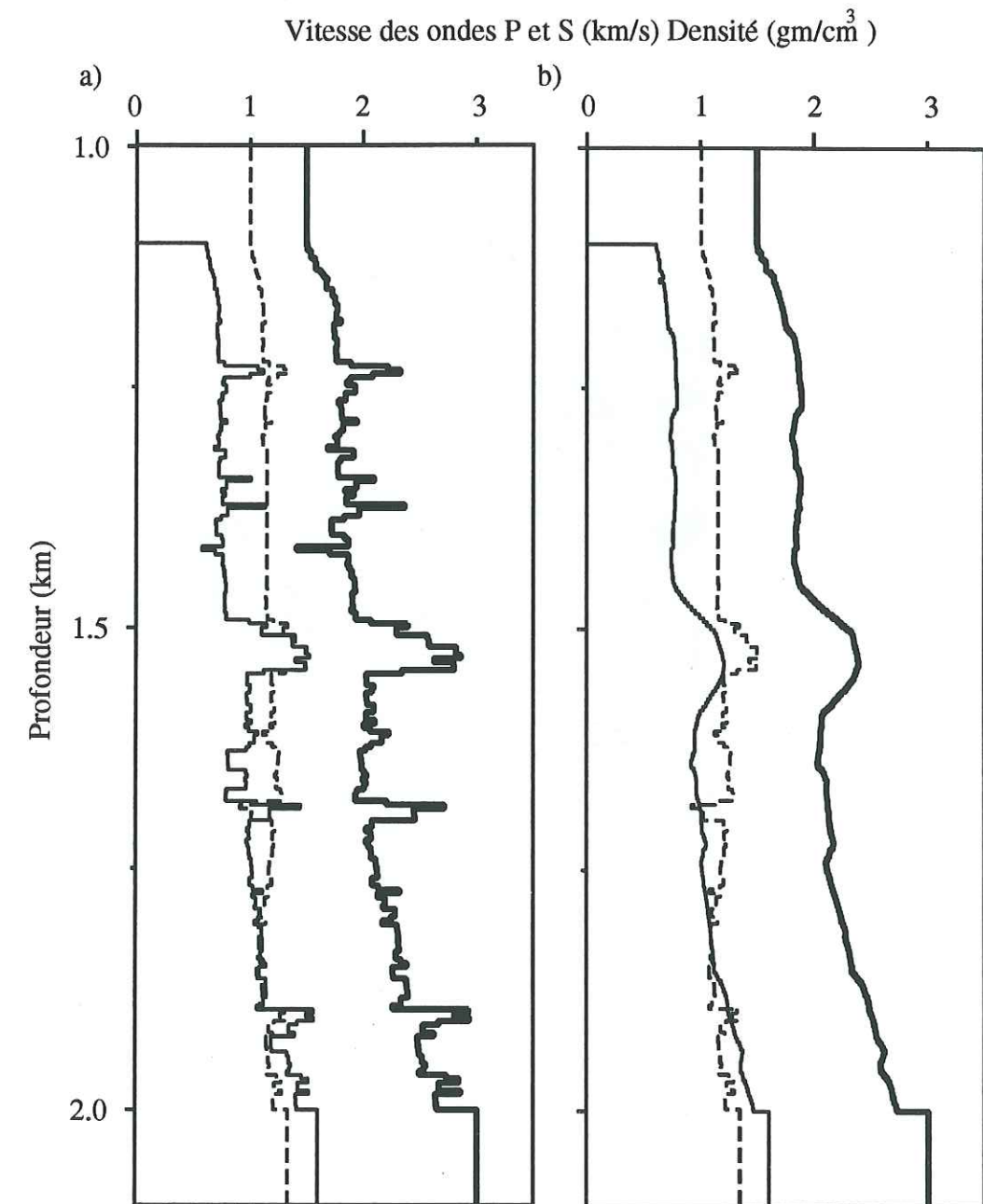


Fig 5.6.1: Profils du modèle vrai a) et du modèle de départ b). La vitesse des ondes P est en trait épais. La vitesse des ondes S est en trait fin. La densité est en tireté.

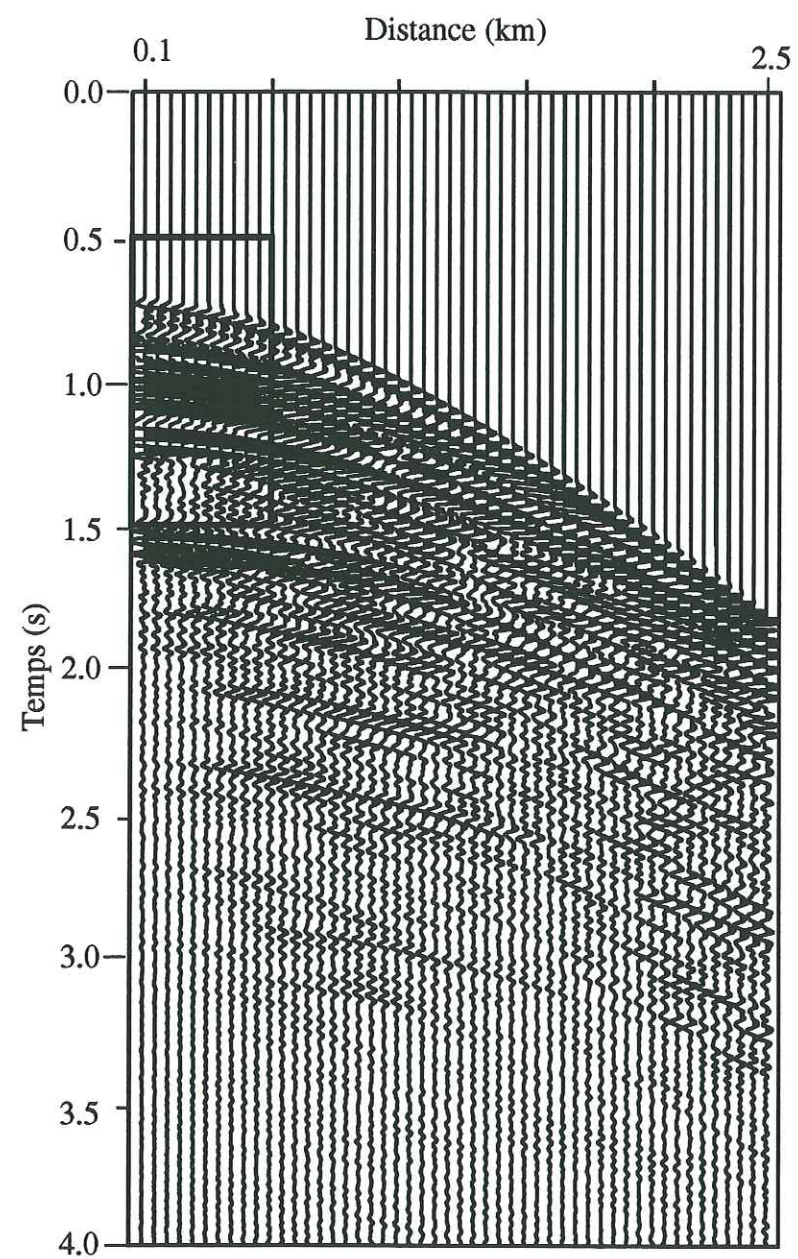


Fig 5.6.2: Composante verticale du déplacement obtenue pour une force ponctuelle verticale à partir du modèle vrai de la figure 5.6.1.

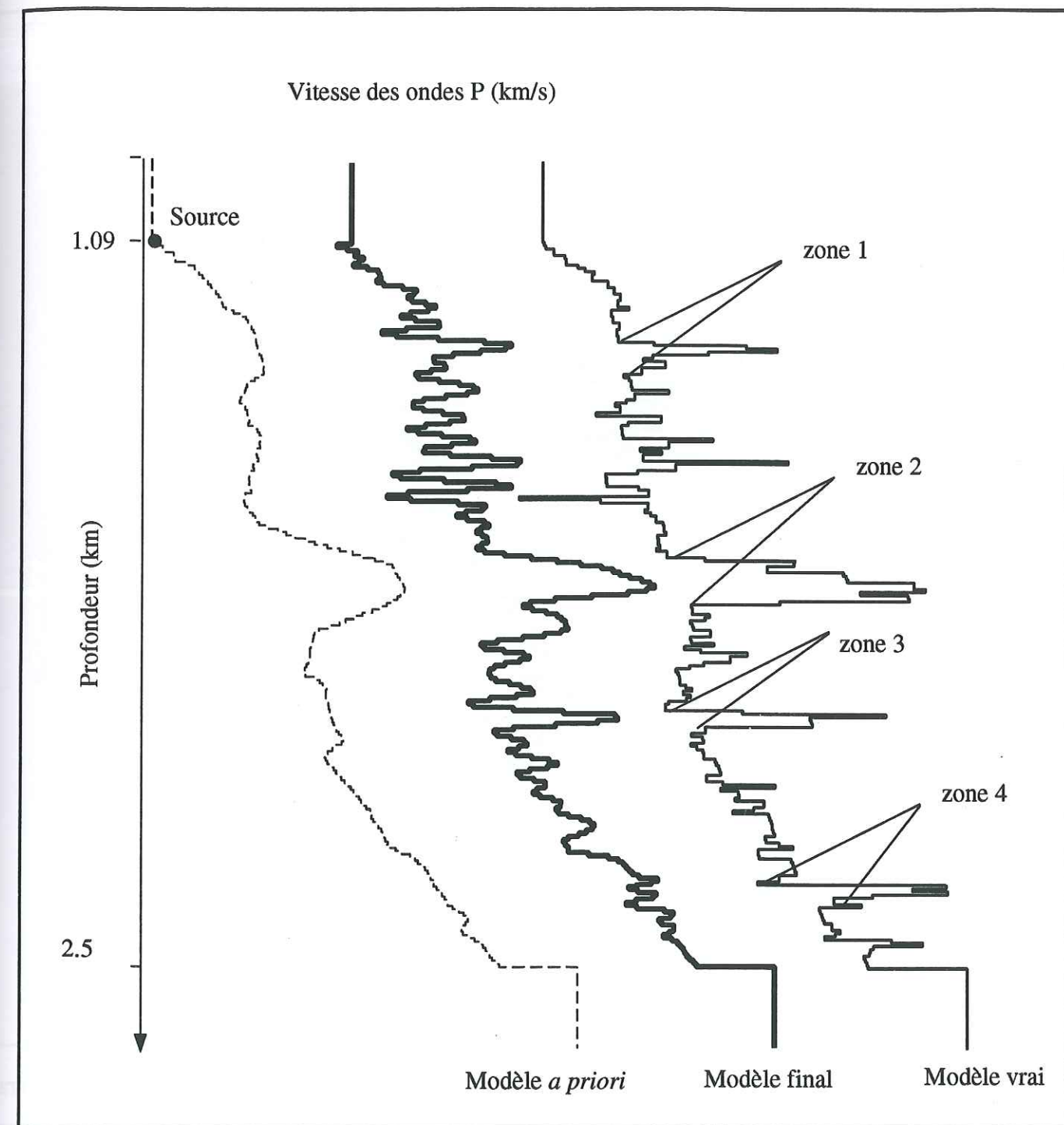


Fig 5.6.3: La source est placée sur le fond de l'eau. On inverse la section dans le cadre rectangulaire de la figure 5.6.2.

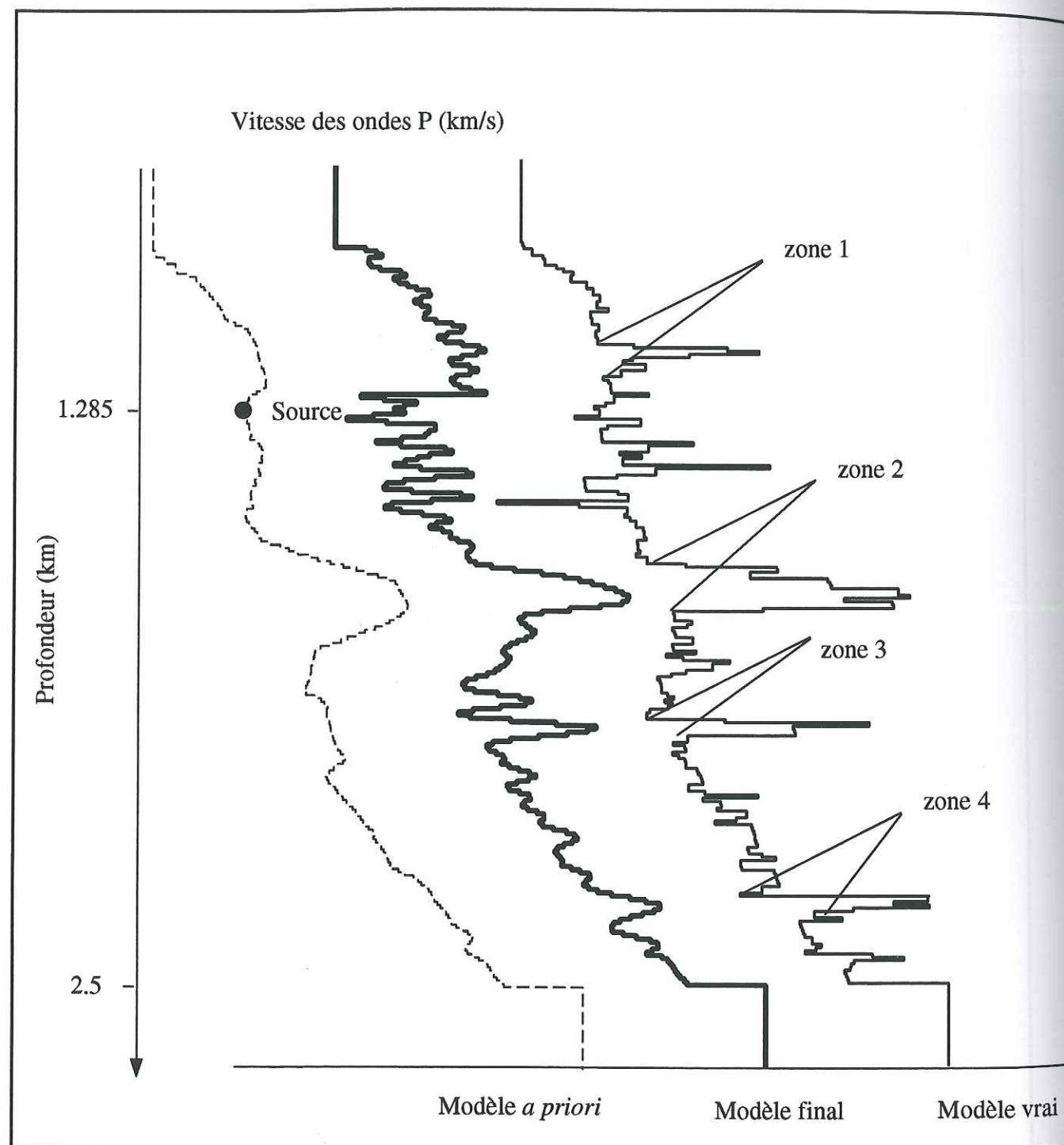


Fig 5.6.4: La source est dans les sédiments à une profondeur de 1285 mètres. On inverse la partie de la section dans le cadre rectangulaire de la figure 5.6.2.

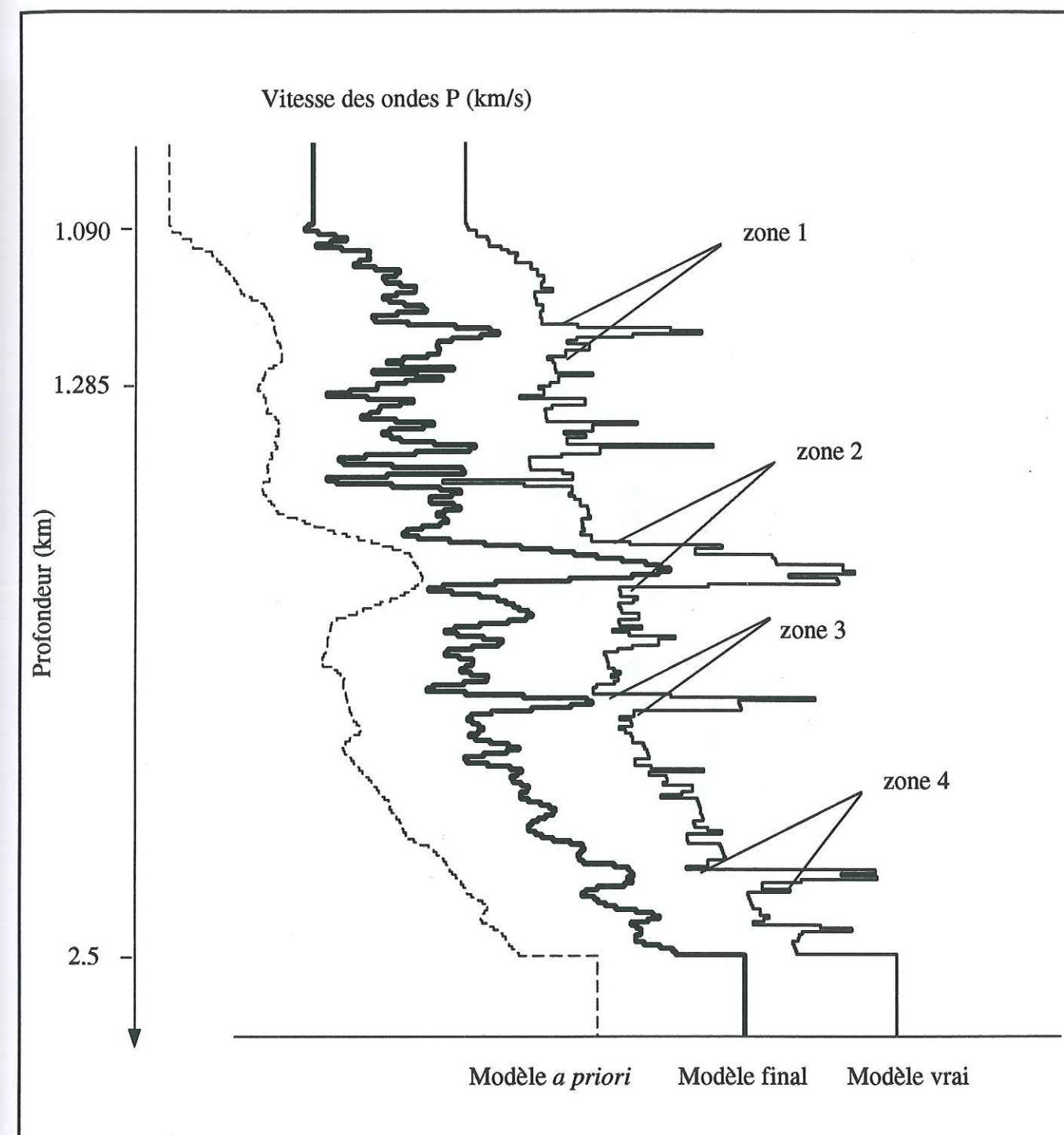


Fig 5.6.5: L'inversion est réalisée en considérant dans un premier temps la source à une profondeur de 1285 mètres puis dans un deuxième temps sur le fond de l'eau. On inverse la partie de la section dans le cadre rectangulaire de la figure 5.6.2.

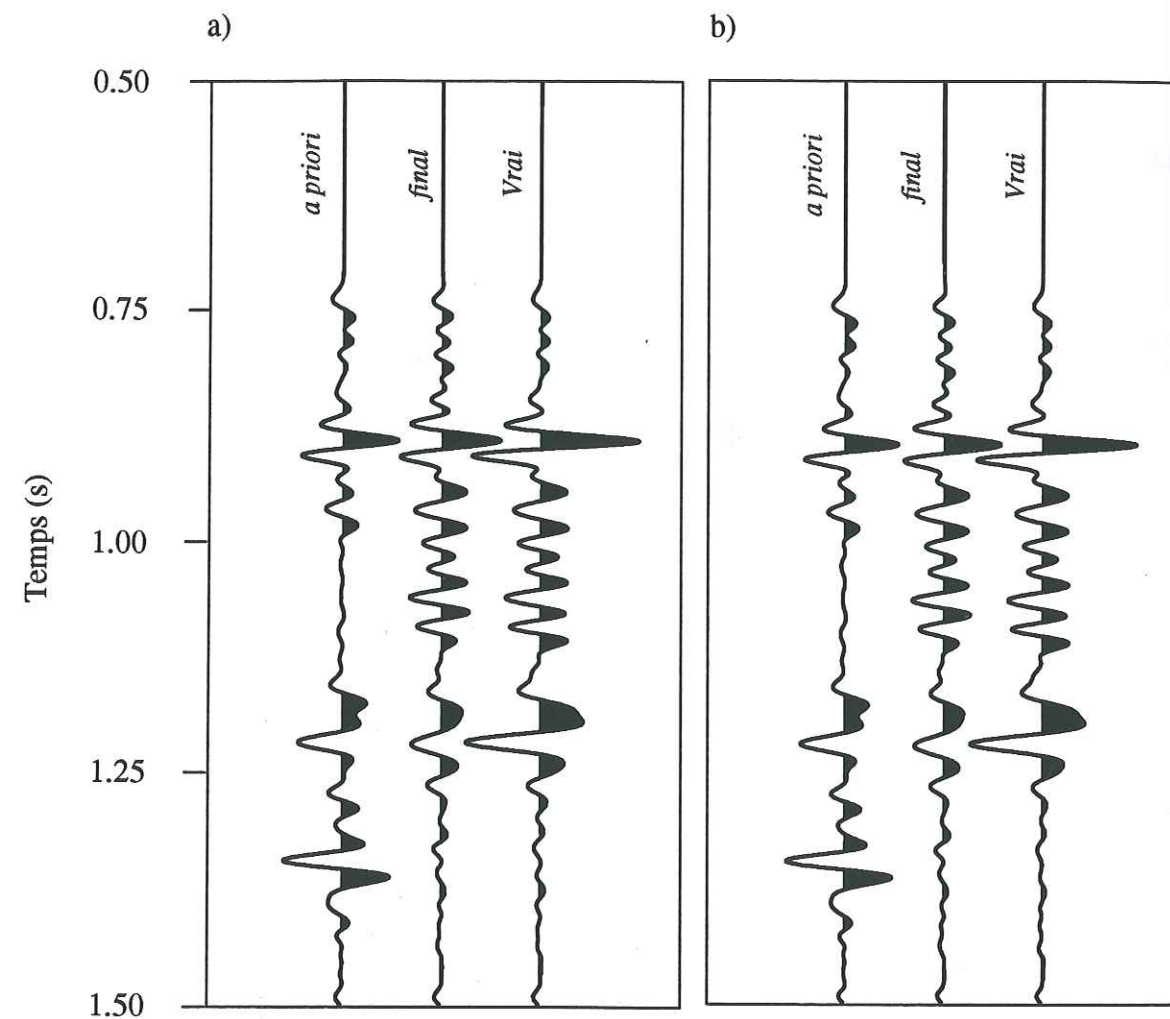


Fig 5.6.6: Chacune des 2 sections compare la trace calculée pour le modèle *a priori* (gauche), *final* (centre), et *vrai* (droite). La section a) est obtenue pour le premier récepteur, la section b) pour le dixième.

La section calculée sur 4 secondes est présentée sur la figure 5.6.2, les signaux retenus pour l'inversion sont inclus dans le cadre rectangulaire. La fréquence dominante du signal étant de 30 Hertz, la vitesse moyenne des ondes P de 3000 m/s, les longueurs d'ondes caractéristiques du problème sont de l'ordre de la centaine de mètres.

La figure 5.6.3 montre le résultat final pour les ondes P de cette inversion. 4 zones se distinguent, présentant chacune une variation de vitesse importante sur une épaisseur dépassant 10 mètres (zones 1, 2, 3 et 4 de la fig 5.6.3). Les résultats obtenus permettent de souligner les trois caractéristiques suivantes:

- 1) Le modèle estimé permet de retrouver les zones 1, 2 et 3. Compte tenu des longueurs d'ondes caractéristiques du problème, ces zones sont suffisamment épaisses pour être inversées. Les contrastes de vitesse sont correctement estimés et sont comparables à ceux du modèle vrai.
- 2) Entre la zone 1 et la zone 2 les résultats de l'inversion sont médiocres car les variations de vitesse se produisent sur des épaisseurs trop faibles pour être bien évaluées. Les contrastes de vitesse sont mal évalués, même si leurs positions sur le profil correspondent à des sauts de vitesse réels.
- 3) Les résultats sont corrects sur une profondeur de 2 km environ à partir de la surface, et seule la zone 4 n'est pas retrouvée. L'information sur le milieu profond est présente dans les données mais avec une amplitude nettement inférieure à celle du milieu superficiel. Pour tenter de contrer ce phénomène, nous avons utilisé un opérateur de préconditionnement qui réalise une égalisation dynamique du gradient de la fonction coût (Gauthier *et al.*, 1986; Tarantola, 1986). Ce préconditionnement consiste à multiplier la valeur du gradient pour chaque couche, par un terme correspondant au rapport entre l'énergie de la dérivée de Fréchet la plus élevée et l'énergie de la dérivée de Fréchet de la couche considérée, cette procédure améliore sensiblement les résultats.

N'ayant pu déterminer précisément les variations de vitesse dans la zone 4, nous proposons, pour améliorer ces résultats, d'éclairer différemment le milieu. Le code de calcul permet de disposer la source et les récepteurs à des profondeurs différentes. Nous plaçons la source dans les sédiments à une profondeur égale à 1285 mètres. Nous procédons selon les

trois étapes décrites dans l'étude précédente. Le résultat final est présenté sur la figure 5.6.4 et souligne les trois points suivants:

1) Les zones 2 et 3 sont pratiquement inchangées par rapport à l'inversion précédente. Les résultats concernant l'épaisseur de ces deux zones et leur vitesse sont les mêmes pour les deux inversions.

2) La zone 4 est mieux définie que précédemment. Il est possible de la distinguer sur le profil de vitesse estimé. Entre la zone 2 et le demi-espace inférieur le modèle obtenu est globalement plus lisse que précédemment.

3) La zone 1 n'est plus inversée bien que les résultats ne soient pas totalement incohérents sur la partie du profil vrai comprise entre le fond de l'eau et la zone 2. L'inversion permet de localiser des sauts de vitesses mais ne permet pas d'évaluer correctement l'amplitude de ces variations. Les couches situées au dessus de la source sont moins bien reconstruites que les couches situées au dessous.

Nous couplons les deux études précédentes en inversant séquentiellement les sismogrammes obtenus à partir des deux positions de la source. Nous inversons l'impédance des ondes P selon les trois étapes suivantes:

Première étape: nous inversons la première seconde du signal à partir des sismogrammes synthétiques obtenus pour une source disposée à une profondeur de 1285 mètres et pour les 10 premiers récepteurs.

Deuxième étape: nous inversons 1 seconde de la section pour une source disposée sur le fond de l'eau. Le nombre de récepteurs et leurs positions sont inchangées.

Troisième étape: nous inversons 1 seconde de la section en considérant maintenant les 50 récepteurs, la source est disposée sur le fond de l'eau.

Le résultat de cette nouvelle inversion est présenté sur la figure 5.6.5. Par rapport aux résultats obtenus dans le cas de la source placée sur le fond de l'eau, les comparaisons entre le modèle estimé et le modèle vrai sont maintenant les suivantes:

1) La zone 1 est correctement estimée. La partie du profil entre le fond de l'eau et la zone 2 est aussi mieux définie. En effet, les variations de vitesse sont plus cohérentes que sur la figure 5.6.3.

2) Les vitesses sont mieux évaluées sur l'ensemble du modèle, et plus particulièrement dans les zones 2 et 3 où elles le sont correctement.

3) Nous retrouvons de l'information sur la zone 4 même si elle n'est pas aussi précise que sur le profil estimé de la figure 5.6.4.

Même si les variations de la vitesse dans la partie du modèle située au-dessus de la source sont mal reconstruites après la première étape, celle-ci permet néanmoins de définir un modèle plus précis pour la deuxième étape. Le modèle final est en définitive plus proche du modèle vrai. Le couplage d'information en utilisant les deux positions de la source a permis d'améliorer sensiblement l'inversion sur l'ensemble du modèle. Lorsque c'est possible, il est important de pouvoir faire varier la position de la source dans le milieu pour augmenter la précision des résultats.

Les comparaisons entre les traces obtenues pour les modèles de départ, final et vrai sont présentées sur la figure 5.6.6. Deux sections sont représentées, chacune d'elle étant normalisée par rapport à la trace la plus énergétique. La distance entre les deux récepteurs est très faible ce qui explique le peu de différence entre les deux sections représentées. Les coefficients de corrélation entre les traces du modèle final et du modèle vrai sont très bons; 93% pour la première trace, 94% pour la dixième.

Univ. J. Fourier - O.S.U.G.
MAISON DES GEOSCIENCES
DOCUMENTATION
B.P. 53
F. 38041 GRENOBLE CEDEX
Tél. 04 76 63 54 27 - Fax 04 76 51 40 58
Mail: plalour@ujf-grenoble.fr

VII. Inversion de données réelles OBS de la campagne MALIS

A. Présentation

La campagne Malis a été effectuée dans le cadre d'une collaboration entre différents organismes¹ intéressés par l'étude de la propagation en milieu marin des ondes dont la bande passante se situe entre 0 et 50 Hertz. L'étude présentée ici porte sur les données d'un sismographe fond de mer OBS situé au large de Nice, en Mer Ligure. Les données que nous étudions correspondent aux enregistrements relatifs à la partie du rail 12 s'éloignant de l'OBS vers la longitude 8° Est (cf figure 5.7.1). Les trois composantes du mouvement ont été enregistrées, nous n'exploitons que la composante verticale. la géométrie du profil est en 3 dimensions et se résume par le schéma ci-dessous

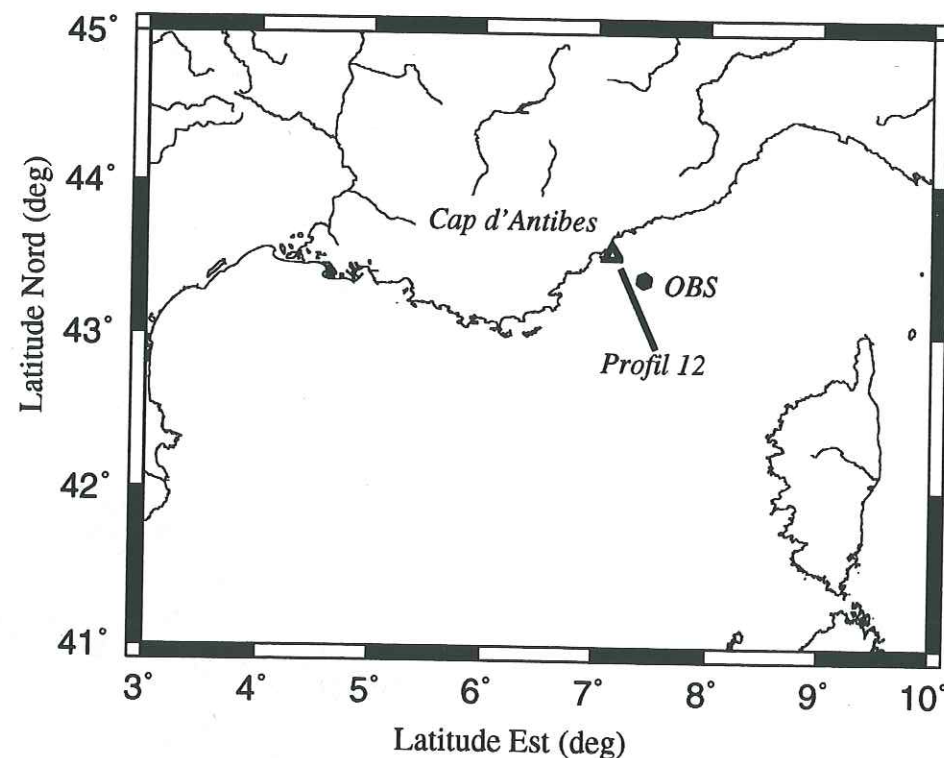


Figure 5.7.1: profil 12 de la Campagne Malis

¹ L'organisme maître d'oeuvre a été le GEMCO (Groupe d'étude de la marge continentale et de l'océan) les laboratoires associés à cette expérience sont le CEPHAG de Grenoble et le Laboratoire de Géodynamique de Villefranche sur mer

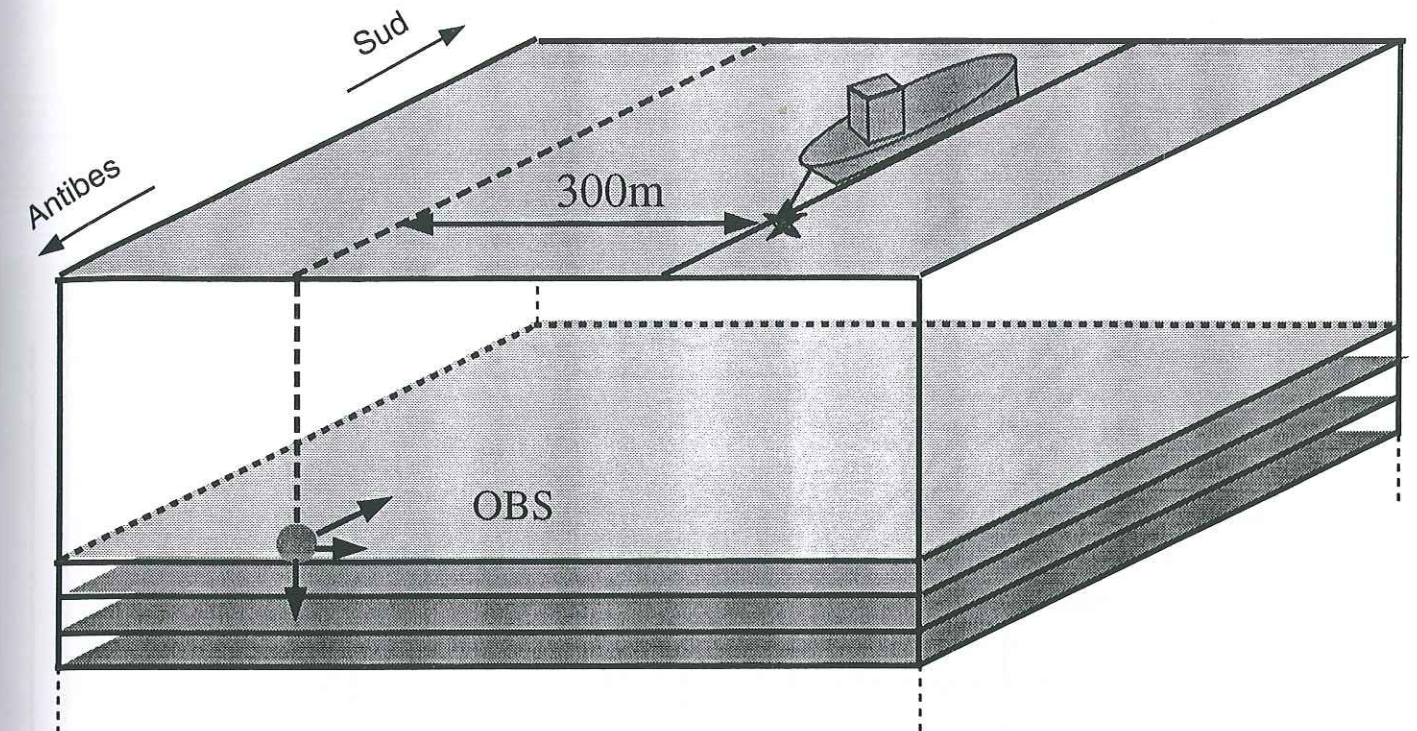


Figure 5.7.1bis: Géométrie du profil 12 de la campagne Malis

Le canon à air utilisé est de type SODERA "GI" de GENAVIR-IFREMER d'une capacité de 16 litres. La profondeur moyenne de la source est de 20 mètres. Les positions de la source et du récepteur sont données par un GPS différentiel dont la précision théorique est de l'ordre de 10 mètres.

Une première étude de sismique réfraction menée par Marianne Nardin, François Glangeaud et Jean-Michel Vanpé du CEPHAG de Grenoble a permis de déterminer le profil de vitesse des ondes P *a priori* présenté sur la figure 5.7.2. Les vitesses des ondes S ont été évaluées à partir des valeurs typiques des matériaux rencontrés dans la zone d'étude. Nous supposons que les 200 premiers mètres du fond marin sont des argiles saturés en eau pour lesquelles les vitesses des ondes S sont comprises entre 200 et 800 m/s, les vitesses des ondes P sont comprises entre 1100 et 2500 m/s et les masses volumiques sont comprises entre 2.0 et 2.4 g/cm³ (Bourbié *et al*, 1986).

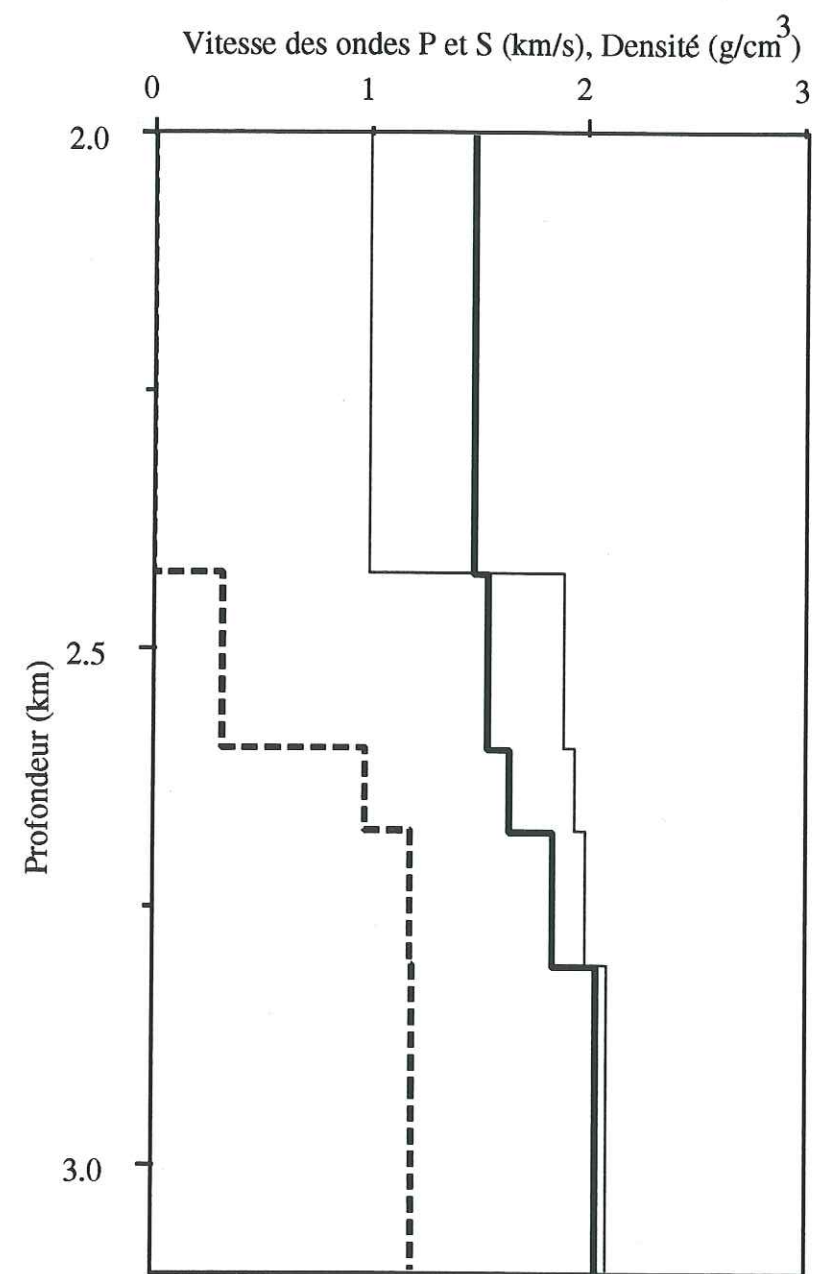


Fig 5.7.2: Profils de vitesse des ondes P et S, et de la densité

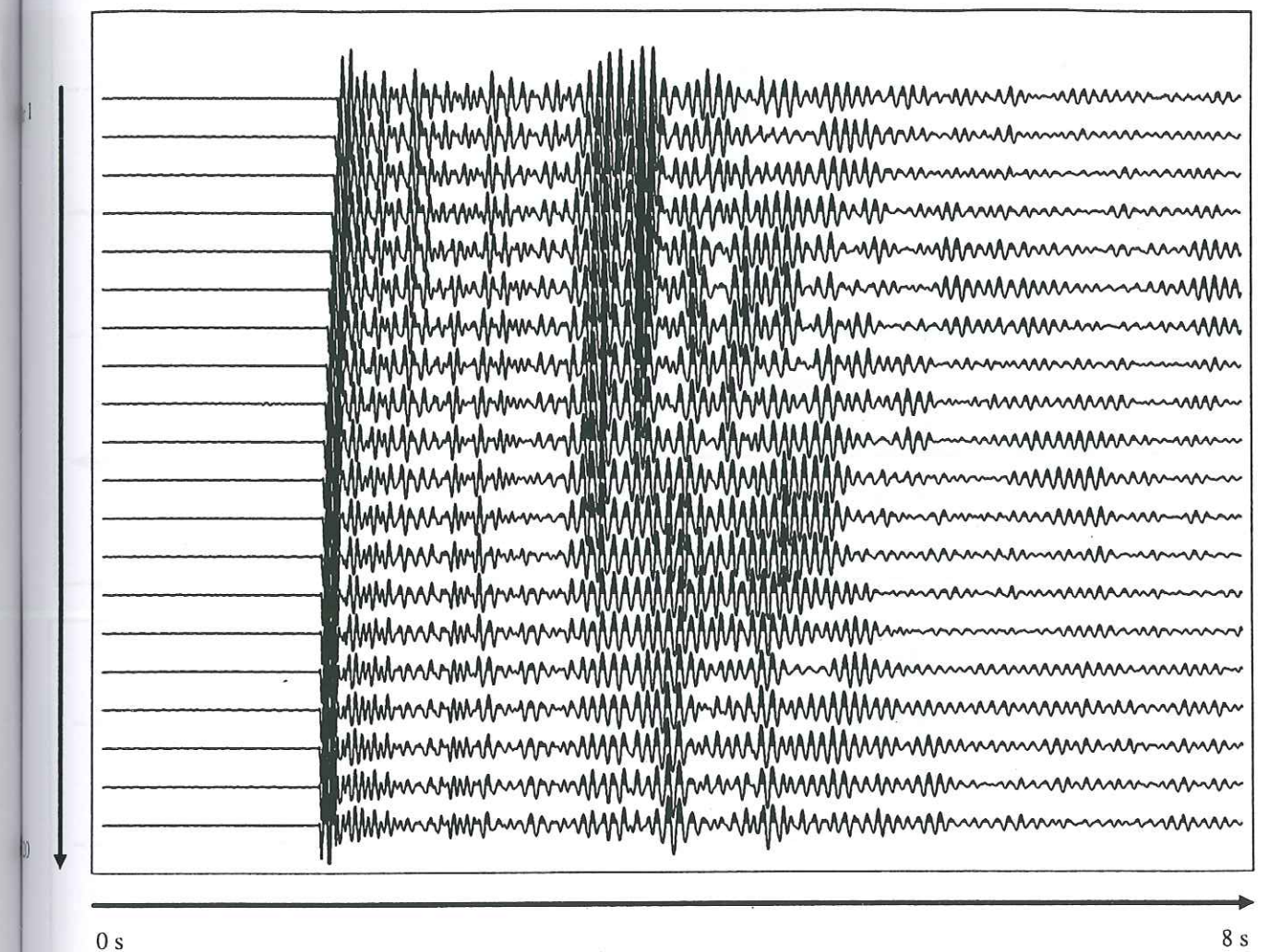


Figure 5.7.3 : Section filtrée non déconvoluée de la source

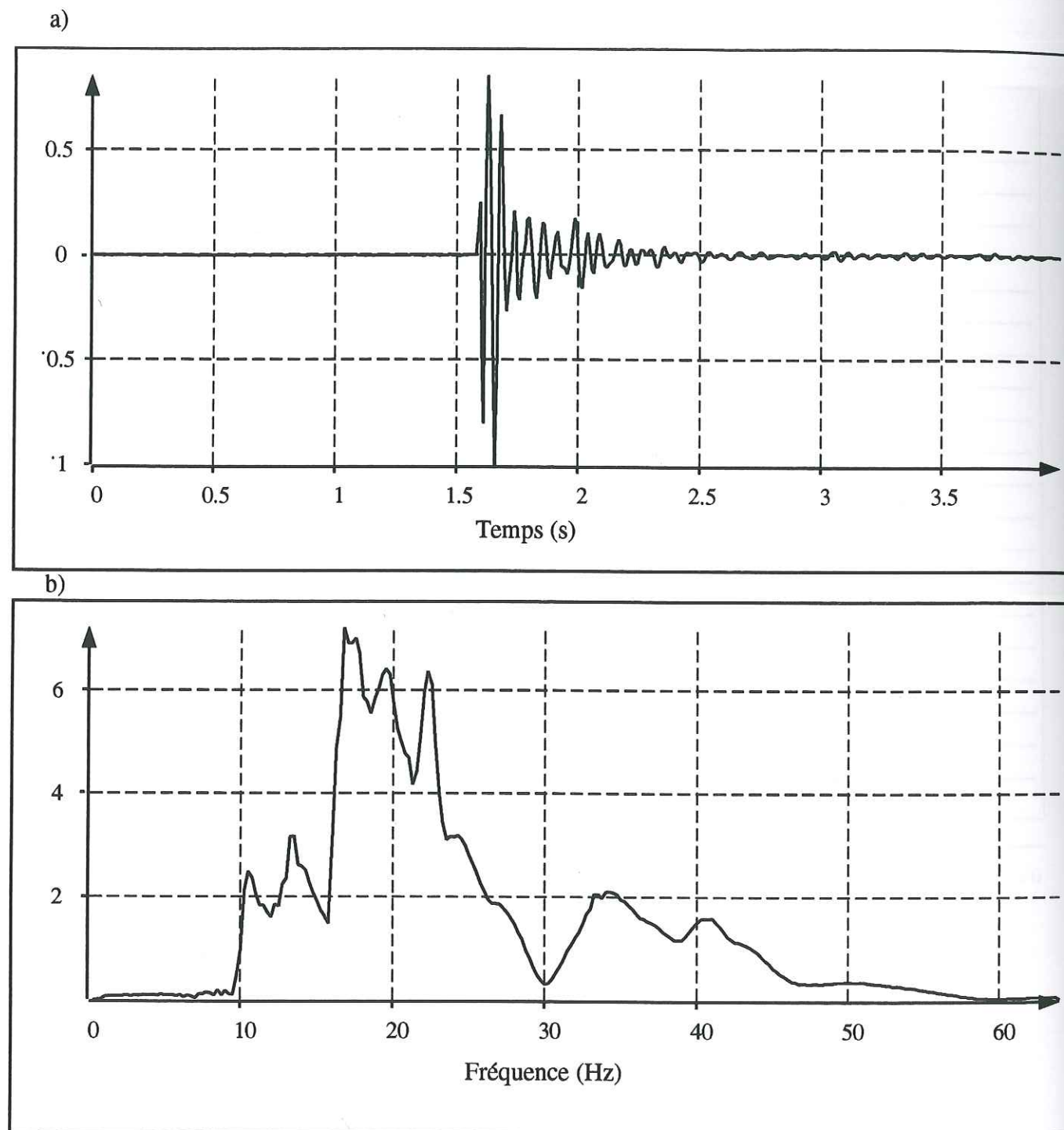


Fig 5.7.4: a) Signature temporelle de la source et b) spectre d'amplitude de la source.

B. Traitements des données

1. Filtrage et déconvolution

Les traitements de filtrage des données, d'estimation de la signature de la source, de déconvolution des données par cette ondelette, et enfin de convolution par un signal de Ricker ont été réalisés au CEPHAG de Grenoble.

Les données à inverser correspondent aux enregistrements des 20 premiers tirs limités à 8 secondes d'enregistrement. Les données ont été filtrées dans la bande passante 0-64 Hertz en appliquant un filtre de Butterworth d'ordre 4. La figure 5.7.3 montre les 20 traces retenues après filtrage. La signature de la source est évaluée au niveau de l'OBS. Pour cela, les composantes verticales et horizontales des mouvements ont été réorientées dans un repère mobile dont l'axe des abscisses est porté par la droite passant par les positions de la source et de l'OBS. Les traces sont ensuite sommées et la forme d'onde résultante, très stable au début du signal est identifiée comme étant la signature temporelle de la source. La figure 5.7.4 montre l'ondelette et son spectre d'amplitude. Les données sismiques ont ensuite été déconvoluées de cette signature et reconvoluées par un signal temporel de Ricker à phase nulle centré sur une fréquence dominante de 15 Hertz. Le résultat de ces traitements est présenté sur la figure 5.7.5

2. Corrections statiques

La partie de la section que nous inversons correspond à la fenêtre temporelle de 1.5 à 2.5 secondes des 20 traces qui composent la section originale (figure 5.7.6 en haut). Un examen attentif des données sélectionnées montre que les temps d'arrivées des événements sismiques sont affectés d'erreurs statiques (décalages temporels constants le long d'une même trace) dues à une mauvaise appréciation des distances source-récepteurs. La réduction de ces erreurs se ramène à un problème d'optimisation où l'on cherche à caler précisément les temps d'arrivées observés par rapport aux temps d'arrivées théoriques le long d'une couche régulière. Dans notre cas, les temps d'arrivées sont alignés sur l'hyperbole caractérisant l'onde directe dans une géométrie 3-D.

La procédure comporte les étapes suivantes:

1) Corrections dynamiques des données par rapport à différentes vitesses apparentes acceptables. Ces vitesses sont dans notre cas contenues dans l'intervalle (1400, 1500 m/s)

2) Choix de la vitesse apparente la plus raisonnable: pour cela nous calculons l'intercorrélation de chacune des 20 traces avec toutes les traces de la section redressée. Chacune de ces 20×20 intercorrélations déterminent un retard ou une avance par rapport au temps théoriques correspondant à la vitesse apparente considérée. De toutes les vitesses apparentes testées, nous retenons celle pour laquelle la somme en valeur absolue des délais est minimale.

3) Choix de la trace de référence pour l'application des corrections statiques avec la vitesse apparente optimale. Cette trace est celle pour laquelle la somme algébrique des délais des 20 intercorrélations est minimale.

4) Suréchantillonnage des signaux et application des corrections temporelles en nombre d'échantillons pour annuler les délais de chacune des intercorrélations calculées lors de l'étape 3.

Cette procédure a permis d'obtenir une vitesse apparente de 1430 m/s. Les corrections appliquées aux sismogrammes sont typiquement de l'ordre de ± 6 ms. La section corrigée est représentée sur la figure 5.7.6 b).

3. Résultats

Plusieurs tests préliminaires sur ce jeu de données ont été nécessaires pour définir la stratégie d'inversion la plus adaptée. Il s'est avéré qu'une inversion de l'impédance des ondes P à partir des premières traces inverse correctement les premières arrivées (entre 1.5 et 1.9 secondes) mais la procédure se fige sur un modèle de vitesse d'onde P incohérent. Le choix du modèle de départ est lui aussi très important, ce qui était prévisible. Le paramètre le plus sensible est la vitesse des ondes S. Nous supposons les premiers 200 mètres du profil avec des vitesses S correspondant à des argiles saturés en eau, et nous considérons en premier lieu l'inversion des traces 5 à 15 parce que sur cette partie de la section les conversions PS et SP sont bien visibles et donc sensibles à une inversion des impédances S. Nous proposons alors pour inverser la section de la figure 5.7.6b) de procéder selon les 4 étapes suivantes:

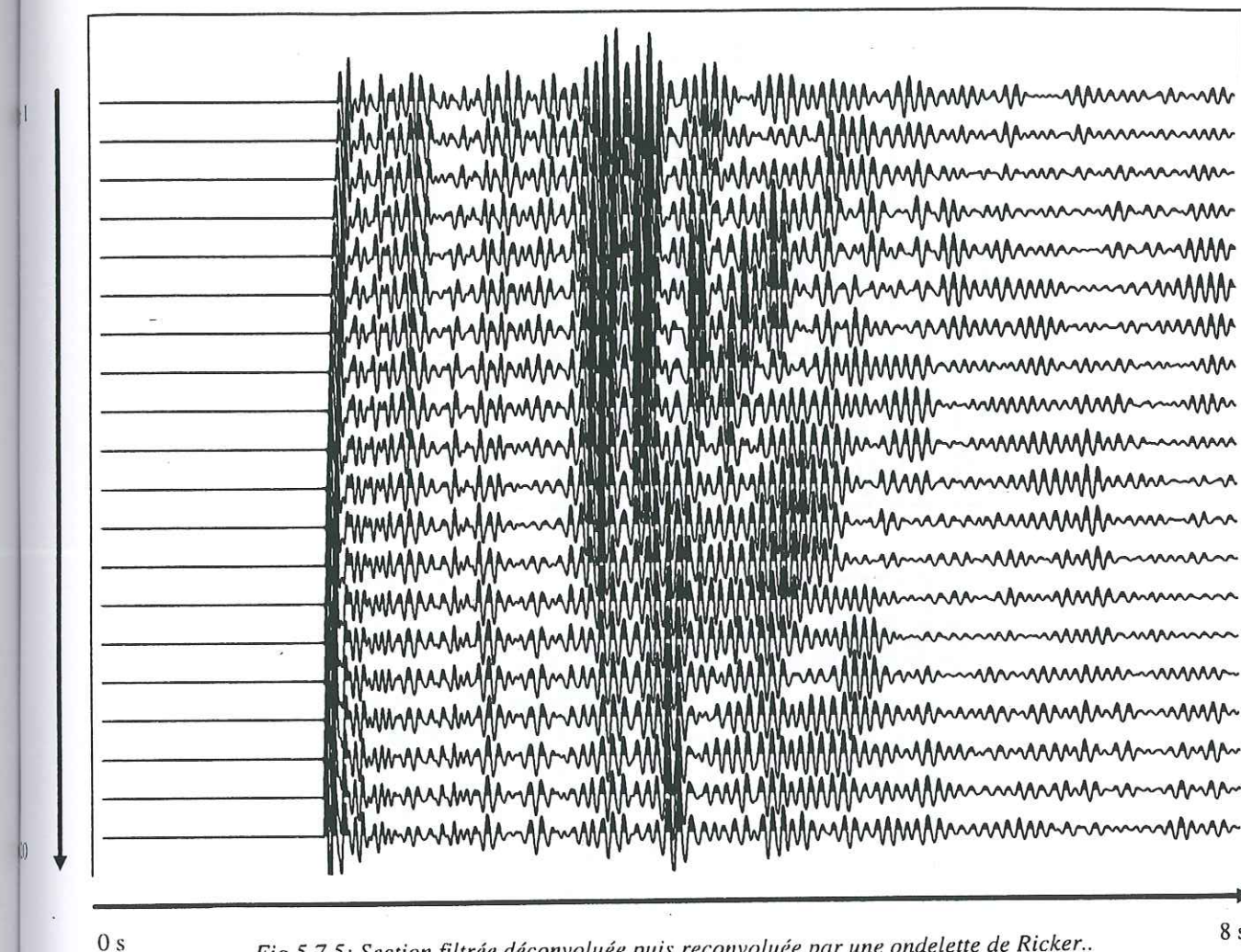


Fig 5.7.5: Section filtrée déconvoluée puis reconvoluée par une ondelette de Ricker..

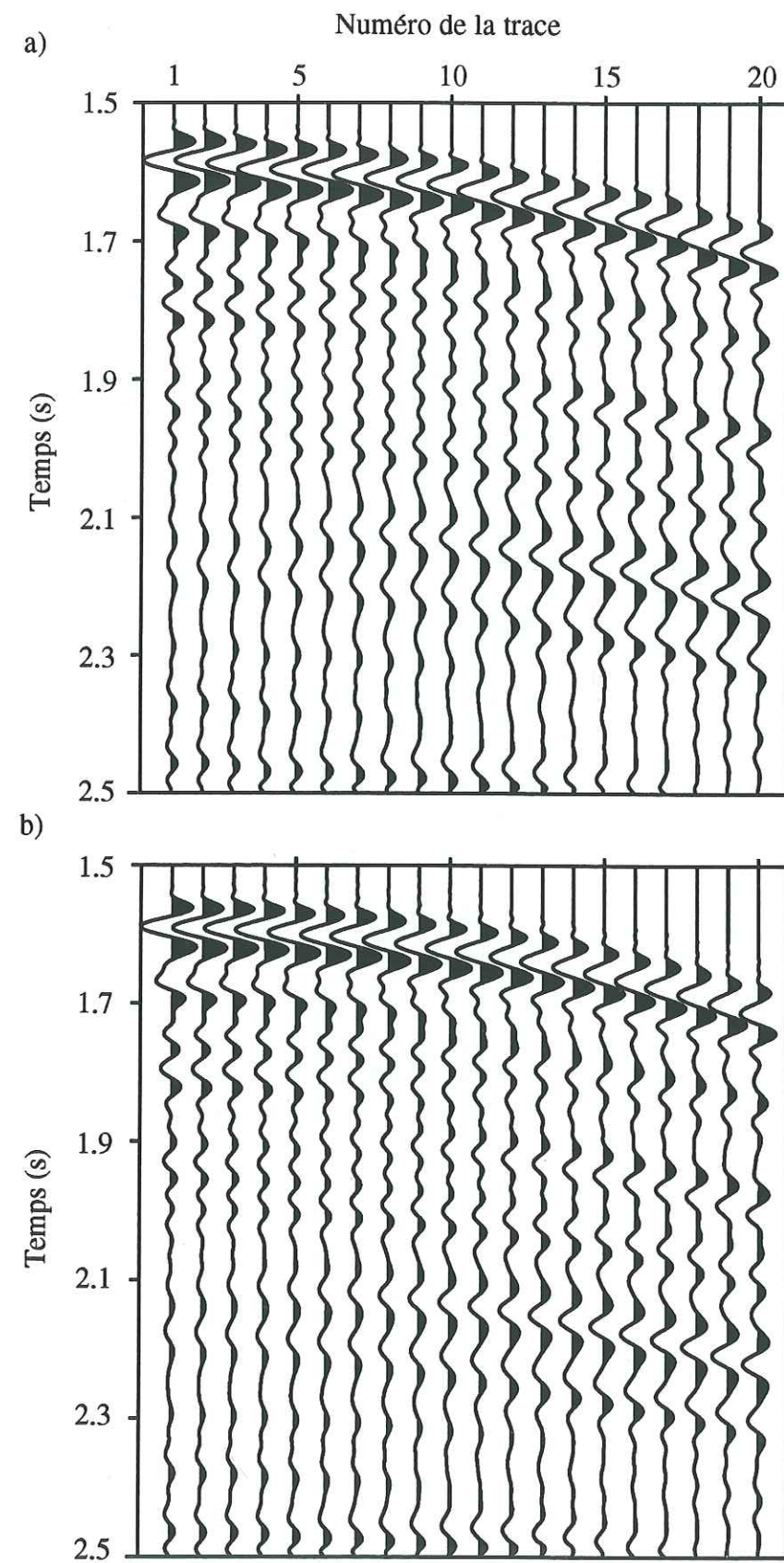


Fig 5.7.6: Déplacement vertical. a) Section avant corrections statiques
b) Section après corrections statiques

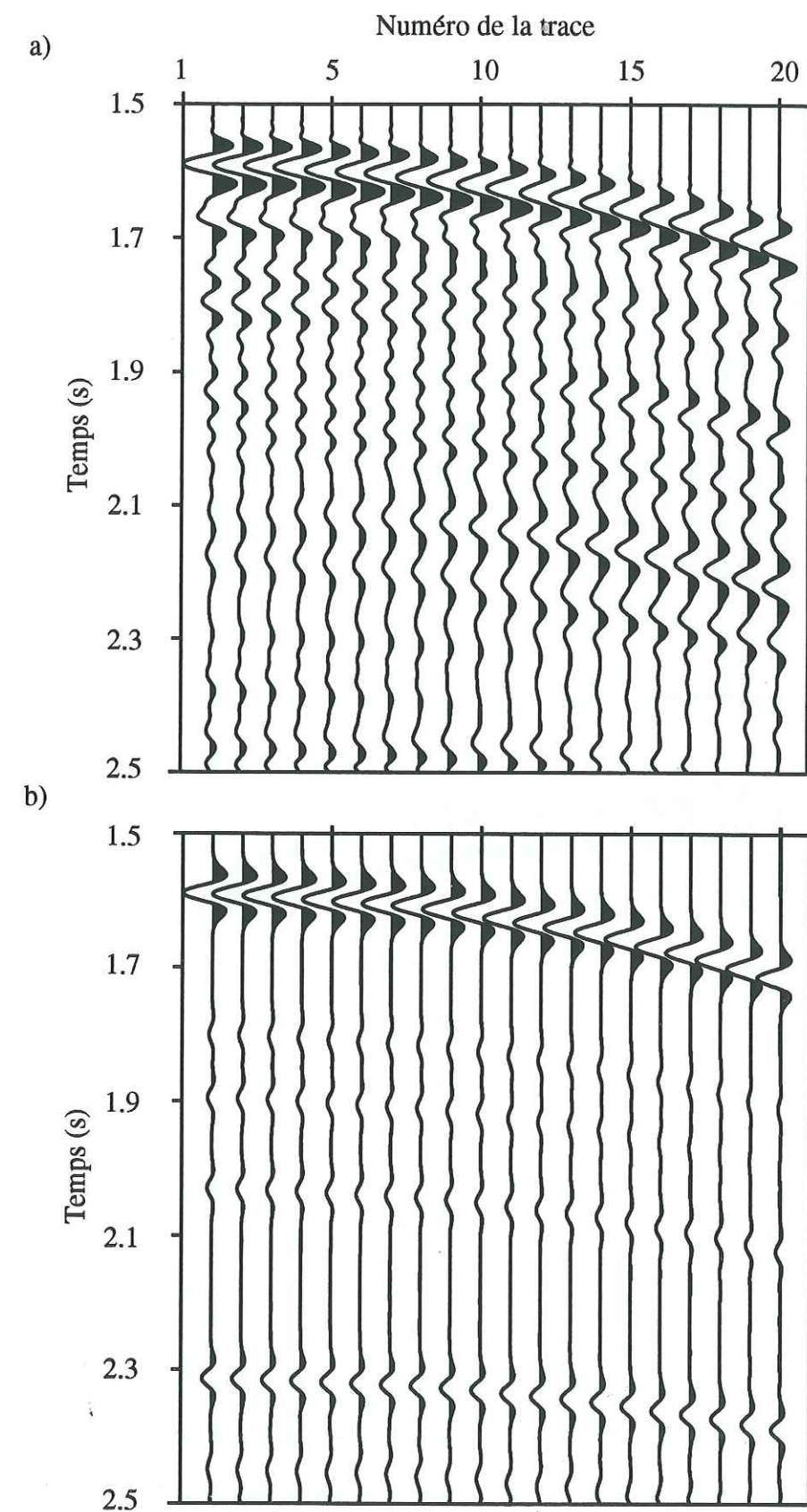


Fig 5.7.7 :a) Déplacement vertical observé. b) Déplacement vertical calculé à partir du modèle a priori.

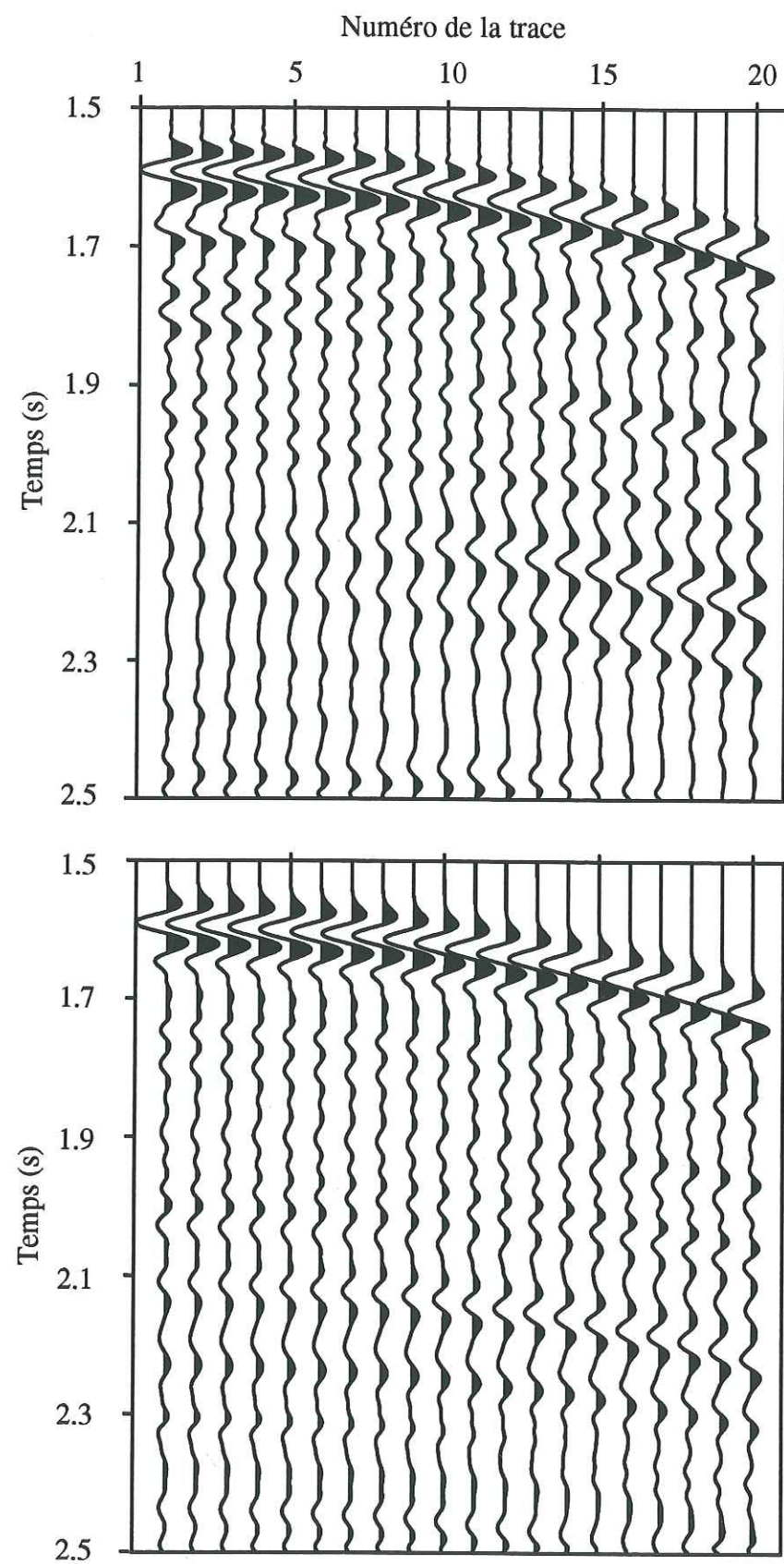


Fig 5.7.8 :a) Déplacement vertical observé b) Déplacement vertical calculé à partir du modèle final.

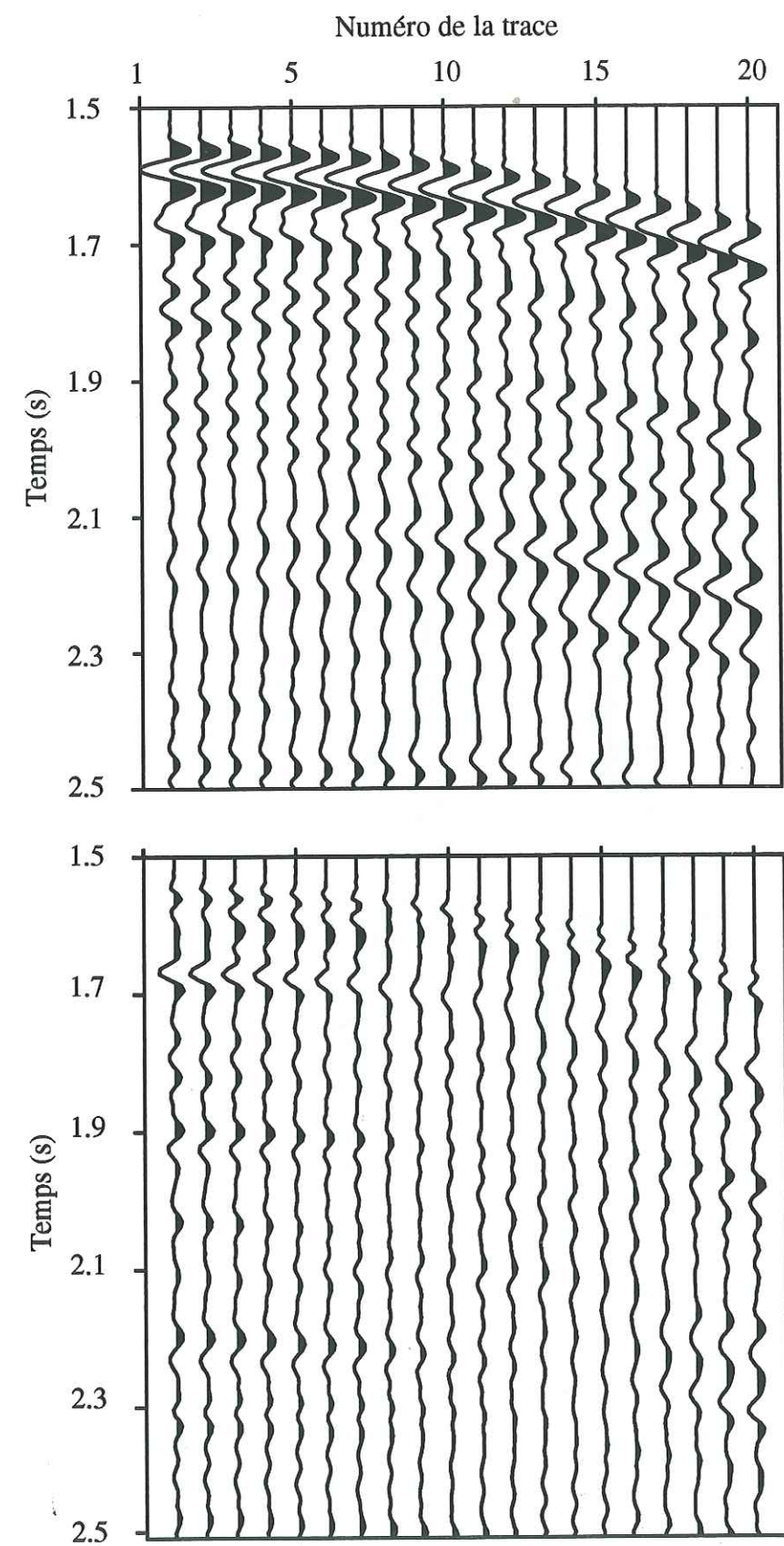


Fig 5.7.9:a) Déplacement vertical observé. b) Champ résiduel entre les données et la section calculée pour le modèle final.

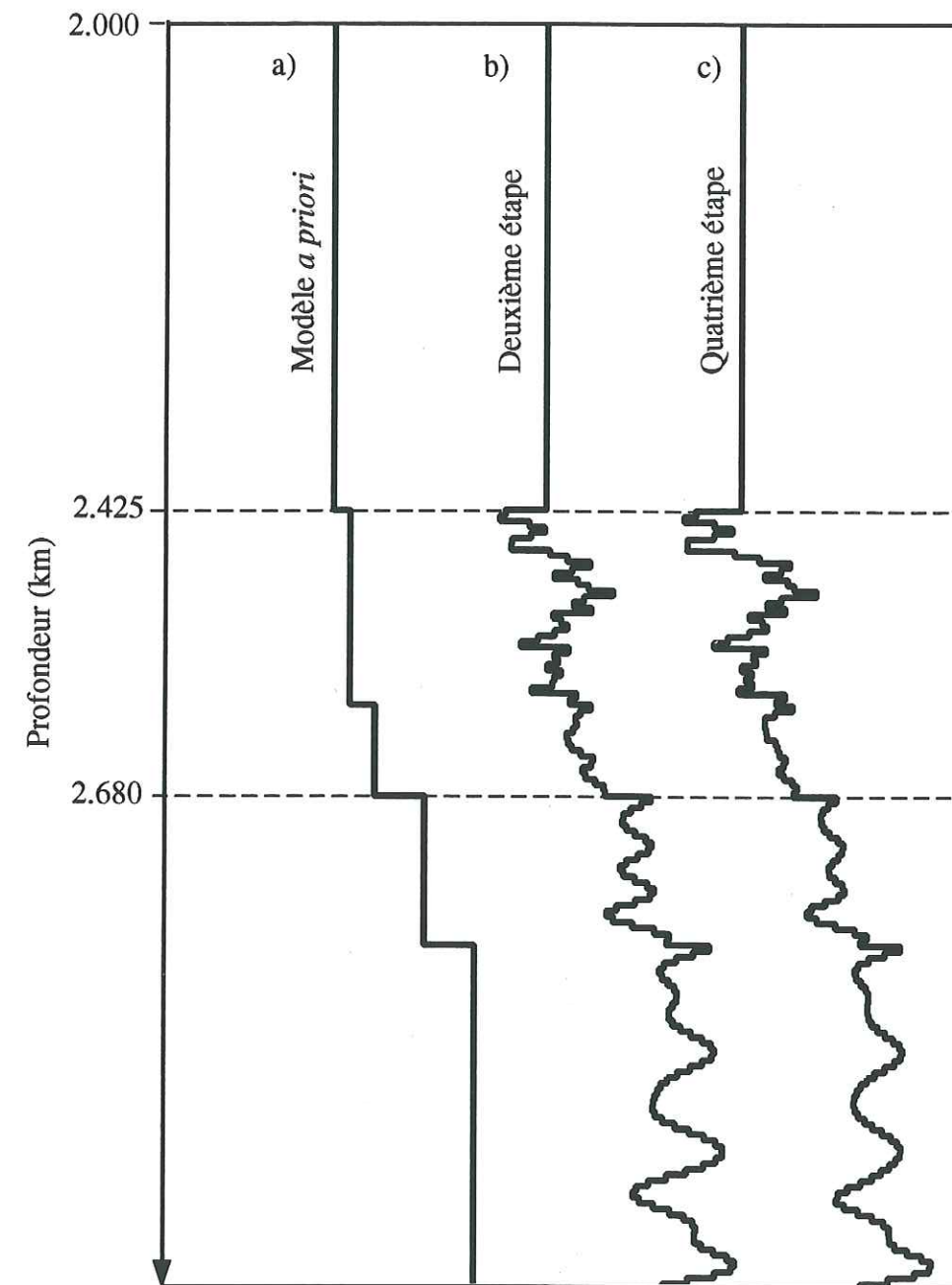


Fig 5.7.10: Profils de vitesse des ondes P: a) *a priori*; b) après la deuxième étape; c) après la quatrième étape.

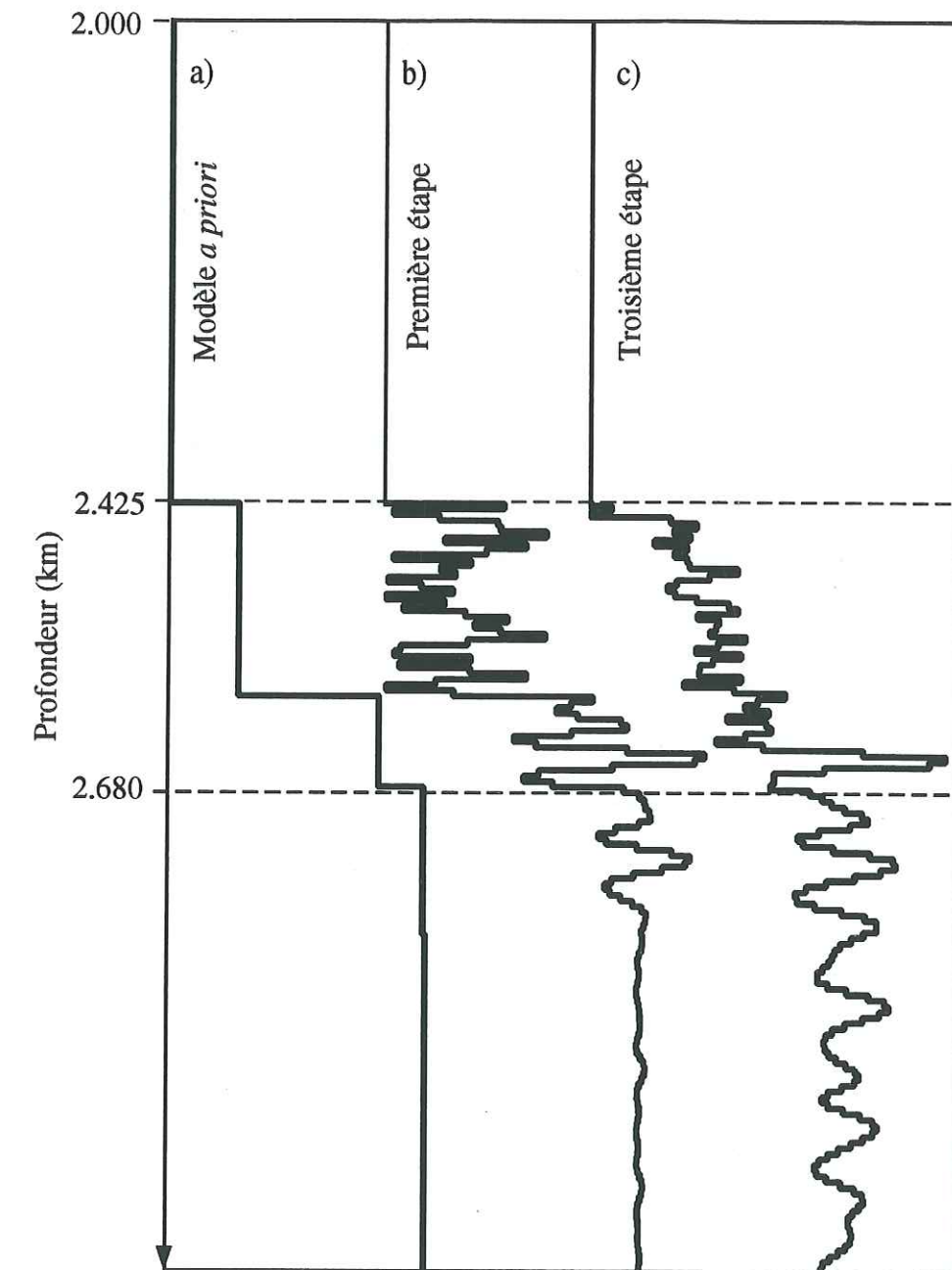


Fig 5.7.11: Profils de vitesse des ondes S: a) *a priori*; b) après la première étape; c) après la seconde étape.

Première étape: Nous inversons les traces 5 à 15 par rapport à l'impédance des ondes S.

Deuxième étape: Nous inversons les traces 5 à 15 par rapport à l'impédance des ondes P.

Troisième étape: Nous inversons les 20 traces par rapport à l'impédance des ondes S.

Quatrième étape: nous inversons les 20 traces par rapport à l'impédance des ondes P.

Les données réelles de la figure 5.7.7a comportent de nombreuses phases qui ne figurent pas sur la section calculée pour le modèle *a priori* (fig 5.7.7 b). En particulier, ce modèle n'explique pas les ondes converties présentes sur les traces les plus éloignées de la section observée. Pour restituer les grandes longueurs d'ondes du modèle, l'inversion devrait être initiée avec les composantes basses fréquences des données. Malheureusement, l'énergie des données est pratiquement nulle dans une gamme de fréquence inférieure à 10 Hz.

Le champ d'onde obtenu pour le modèle final est présenté sur la figure 5.7.8; le champ résiduel après inversion est présenté sur la figure 5.7.9. Leur analyse permet de souligner les points suivants:

1) La meilleure résolution des données est obtenue pour les traces 5 à 15 car l'essentiel de l'information provient des deux premières étapes. Cette remarque est particulièrement bien montrée par la figure montrant le champ résiduel. Au terme de la deuxième étape, les coefficients de corrélation pour les traces 5 et 15, sont respectivement 91% et 92%. Au terme de la quatrième étape, les coefficients de corrélation pour la première et dernière trace sont respectivement 81% et 83%.

2) Le modèle final obtenu permet de retrouver des phases converties que le modèle *a priori* ne permettait pas d'expliquer. Il permet notamment d'expliquer les phases entre 2.0 et 2.3 secondes qui sont très énergétiques sur les données observées.

3) Sur les premières traces de la section le début du signal est mal estimé. Cette remarque s'applique plus particulièrement à la phase pointée à 1.67 seconde sur la trace numéro 1 de la figure 5.7.6. Cette phase est pourtant suffisamment énergétique par rapport au reste de la section et aurait dû être retrouvée par inversion.

Les figures 5.7.10 et 5.7.11 montrent les profils obtenus au terme des différentes étapes d'inversion effectuées. Les oscillations des profils de vitesse à partir de 2680 m de profondeur indiquent une perte de sensibilité des paramètres inversés et donc une mauvaise évaluation de ces paramètres.

L'inversion donne des vitesses cohérentes sur les 250 premiers mètres du modèle à partir de 2425 mètres de profondeur. La comparaison des variations de vitesse des ondes P et des variations de vitesse des ondes S indique que le coefficient de Poisson varie en fonction de la profondeur. Ostrander (1984) montre que la valeur du coefficient de Poisson a une forte influence sur les variations du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence. Il montre notamment que pour des angles d'incidence modérés (entre 10° et 30°), ces variations sont d'autant plus significatives que le coefficient de Poisson varie fortement (de 0.1 à 0.4). Une telle variation du coefficient de Poisson pour des milieux poreux saturés semblent raisonnable sur les 200 premiers mètres de sédiments marins. Ces variations du coefficient de réflexion peuvent expliquer les atténuations rapides des phases sur la section observée.

VIII. Conclusions

Notre technique d'inversion permet de traiter des données réelles de sismique marine pour lesquelles l'approximation de milieu tabulaire est raisonnable.

Les tests d'erreurs appliqués aux données synthétiques montrent une bonne robustesse de la méthode. En effet, lorsque les imprécisions sont faibles², les résultats de l'inversion restent corrects.

L'inversion séquentielle des impédances des ondes P et S donne des résultats corrects pour les exemples synthétiques considérés. Toutefois, la densité est un paramètre mal inversé.

² Etude du décalage 1 pour le cas n°1, étude du test 3 pour le cas n°2

Aucune application sur des données réelles ne permet d'inverser correctement ce paramètre. Dans les études que nous avons faites, l'inversion de la densité a été négligée.

L'inversion de données réelles semble donner des informations cohérentes avec le milieu considéré. Une série de tests qui consiste à faire varier le modèle *a priori* pour comparer les modèles en fin d'itérations pourrait permettre de mieux interpréter les résultats. Le manque d'information basse-fréquence (< 10 Hz) ne permet pas d'estimer les grandes longueurs d'onde des modèles. Un remède à ce problème consisterait à utiliser des techniques semi-globales pour tester différents types de modèles *a priori* avant de passer à l'inversion par une technique de moindre carrés généralisés.

Enfin, les simulations supposent un milieu élastique, alors que les milieux marins réels sont mieux décrits par un comportement poro-élastique. Il faudrait donc développer des codes de calculs qui puissent tenir compte de la porosité des milieux saturés en eau.

Conclusions générales

Un programme d'inversion des formes d'ondes a été développé pour estimer les propriétés élastiques dans le domaine temps-distance. Ce programme est capable de prendre en compte des données hautes fréquences et des milieux finement stratifiés, ce qui en fait une méthode particulièrement adaptée à l'inversion de profils de sismique marine, y compris ceux enregistrés par des sismographes fond de mer.

La formulation analytique du problème direct permet de faire des simulations rapides de la propagation des ondes sismiques dans les milieux stratifiés. Bien que le milieu soit à une dimension, la représentation du rayonnement de la source est à trois dimensions et le champ d'onde calculé est complet, ce qui en fait une méthode d'une précision remarquable. Par ailleurs la méthode permet de représenter des géométries source-récepteurs à trois dimensions et peut s'appliquer en particulier à des enregistrements de profils sismiques verticaux, ainsi qu'à des modèles présentant une forte variabilité des propriétés élastiques suivant la profondeur. La validité de cette méthode a été testée en utilisant le théorème de réciprocity des tenseurs de Green.

La formulation analytique de ces tenseurs nous a permis d'évaluer rapidement les effets au premier ordre produits par des points diffractants à l'intérieur d'un milieu tabulaire, en appliquant la formulation générale des dérivées de Fréchet obtenue par Tarantola (1984). Cette formulation permet de calculer la radiation dans les trois directions de l'espace d'une distribution spatiale des points diffractants. Nous avons validé cette méthode et montré qu'elle permet de calculer correctement les effets d'une fine couche faiblement diffractante. Cette méthode pourrait permettre sur les études des propriétés diffractantes au premier ordre d'un arrangement aléatoire de petites hétérogénéités dans un milieu stratifié. La deuxième méthode permet d'évaluer avec rapidité et précision les dérivées de Fréchet pour une perturbation des paramètres élastiques d'une couche plane d'extension infinie. Cette méthode a été validée avec un modèle marin tout à fait réaliste en respectant les limitations imposées par la théorie de Born qui supposent une perturbation faible et localisée des paramètres élastiques. Nos résultats permettent de mieux préciser la notion de faible perturbation inhérente à l'approximation de Born. Ces résultats sont en accord avec ceux énoncés par Dietrich et Kormendi (1990). Par conséquent cette méthode est directement applicable dans un algorithme d'inversion.

La méthode d'inversion proprement dite utilise une technique de gradients conjugués dans le domaine temps-distance et intègre toutes les techniques développées précédemment. Sa robustesse a été étudiée en imposant aux données ou au milieu de propagation certaines erreurs violant les hypothèses de base de l'algorithme. Ces erreurs sont de trois types:

- 1) mauvaise connaissance de la source
- 2) décalages temporels aléatoires de la source (erreurs statiques)
- 3) pendage général du milieu stratifié

Ces tests montrent une bonne robustesse de la méthode lorsque ces erreurs restent relativement faibles. Nos études ont montré qu'il est important lorsque cela est possible, de faire varier la profondeur de la source pour améliorer les résultats de l'inversion. La méthode d'inversion est finalement appliquée à un jeu de données réelles OBS de la campagne Malis en Mer Ligure; cette inversion souligne, encore une fois, l'importance du modèle de départ, et la nécessité d'évaluer correctement la dépendance temporelle du signal émis à la source.

Une solution pour minimiser l'importance du modèle de départ consiste lorsque cela est possible, à considérer des données dans une gamme de fréquences suffisamment large pour inverser d'abord les données basses fréquences sous des faibles angles d'incidence puis, très progressivement, considérer les données plus hautes fréquences pour des angles d'incidence de plus en plus grands. Cette méthodologie aurait pour effet de limiter les risques d'échec de la procédure d'inversion. La prise en compte des trois composantes du mouvement enregistrées par l'OBS permettrait également de mieux contraindre le problème inverse. Cette dernière application n'a pas été abordée dans ce travail.

L'alternative pour améliorer la résolution du problème inverse consisterait à adapter les techniques d'inversion semi-globales existantes (recuit simulé, Métropolis) pour explorer l'espace des modèles. Elles supposent des temps de calculs trop importants pour être directement applicables à des cas de sismique marine, néanmoins elles peuvent être couplées à l'approche Bayésienne du problème inverse. L'évolution constante des calculateurs permettra sans doute d'adapter cette approche aux problèmes sismiques.

Enfin, pour adapter complètement le problème inverse aux cas de sismique marine, il conviendrait de développer des codes d'inversion qui puissent tenir compte de la porosité des

milieux saturés en eau. Cela suppose non seulement de pouvoir calculer le problème direct pour des milieux poreux, mais aussi de pouvoir calculer la matrice des dérivées de Fréchet correspondant à ce problème.

Références

- Aki, K. and Richards, P.G. (1980). *Quantitative seismology, theory and methods*, W.H. Freeman & Co, San Francisco.
- Assous, F. (1989). Identification de milieux élastiques 1-D dans les équations de l'élastodynamique à deux dimensions, *Thèse Université Paris IX-Dauphine*.
- Bleistein, N. and Cohen, J.K. (1982). The velocity inversion problem - Present status, new direction, *Geophysics*, **52**, 931-942.
- Bourbié, T., Coussy, O. and Zinszier, B. (1986). Acoustique des milieux poreux. *publication de l'institut Français du pétrole*. Editions Technip.
- Bouchon, M. and Aki, K. (1977). Discrete wave number representation of seismic source wave fields, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **67**, 259-277.
- Bouchon, M. (1980). Calculation of complete seismograms for an explosive source in a layered media, *Geophys*, **45**, 197-203.
- Bouchon, M. (1981). A simple method to calculate Green's functions for elastic layered media, *Bull. Seism. Soc. Am.*, **71**, 959-971.
- Carazzone, J.J. (1986). Inversion of P-Sv seismic data, *Geophysics*, **51**, 1056-1068.
- Cary, P. W. and Chapman, C. H. (1988). Automatic 1-D waveform inversion of marine seismic refraction data, *Geophysical Journal*, **93**, 527-546.
- Chapman, C. H. and Orcutt, J.A (1985). Least-squares fitting of marine seismic refraction data, *Geophys. J.R. astr. Soc.*, **82**, 339-374.
- Chavant, G. (1974). Identification of functional parameters in partial differential equations, dans *Identification of parameter Distributed Systems*, R.E.Goodson and Polis, Eds. New York NY:ASME.
- Claerbout, J.F. and Muir, F. (1973). Robust modelling with erratic data, *Geophysics*, **38**, 826-844.
- Cohen, J.K. and Bleistein, N. (1979). Velocity inversion procedure for acoustic waves, *Geophysics*, **44**, 1077-1087.

- Cruse, E., Pica, A., Noble, M., McDonald, J. and Tarantola, A. (1990). Robust elastic nonlinear waveform inversion: Application to real data, *Geophysics*, **55**, 527-538.
- Fuchs, K. and Müller, G. (1971). Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations. *Geophysics. J.R. Astron. Soc.*, **11**, 417-433.
- Debski, W. and Tarantola, A. (1995). Information on elastic parameters obtained from the amplitudes of reflected waves, *Geophysics*, **60**, 1426-1436.
- Dietrich, M. (1988). Modeling of marine seismic profiles in the t - x and τ - p domains, *Geophysics*, **53**, 453-465.
- Dietrich, M. and Kormendi, F. (1990). Perturbation of the plane-wave reflectivity of a depth-dependent elastic medium by weak inhomogeneities, *Geophys. J. Int.*, **100**, 203-214.
- Dietrich, M. (1990). Modélisation, traitements et inversion de profils de sismique marine, *Thèse de doctorat d'état*. Université de Bretagne Occidentale.
- Dietrich, M. and Cohen, J.K. (1993). Migration to zero offset (DMO) for a constant velocity gradient: an analytical formulation, *Geophysical Prospecting*, **41**, 621-643.
- Djikpéssé, H. (1996). Caractérisation lithologique du sous-sol: Inversion multiparamètres de données de sismique réflexion marine, *Thèse Université Paris Jussieu*.
- Eaton, D.W.S., Stewart, R.R. and Harrison, M.P. (1991). The Fresnel zone for P-SV waves, *Geophysics*, **56**, 360-364.
- Franklin, J.N. (1970). A Well-posed stochastic extensions of ill-posed linear problems, *J.Math. Anal. Applic.*, **31**, 682-716.
- Gaultier, O., Virieux, J. and Tarantola, A. (1986). Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: Numerical results, *Geophysics*, **51**, 1387-1403.
- Gel'fand, I.M. and Levitan, B. (1956). On the determination of a differential equation from its spectral function. *Am. Math. Soc. Transl. Series*, **1**, 253-304.
- Gjevik, B., Nilsen, A. and Höyen, J. (1976). An attempt at the inversion of reflection data, *Geophys. Prosp.*, **24**, 492-505.

- Gouveia, W.P. (1996a). Bayesian Seismic Waveform Data Inversion: Parameter Estimation and Uncertainty Analysis, *Doctoral thesis*, Colorado School of mines.
- Gouveia, W.P. (1996b). Desimic waveform nonlinear inversion in stratified elastic media, *Consorsium Project on Seismic Inverse Methods for Complex Structures*, **CWP 210**, 107-119, Breckenridge.
- Hardriker, D.G. (1964). Surfaces waves in multilayered elastic media. I. Rayleigh and love waves from buried sources in multilayered elastic half-space, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **54**, 627-679.
- Haskell, N.A. (1953). The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **43**, 17-34.
- Hudson, J. A. (1969). A quantitative evaluation of seismic signals at teleseismic distances I. Radiation from point sources, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **18**, 233-249.
- Hudson, J. A. and Heritage, J. R. (1981). The use of the Born approximation in seismic scattering problems, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **66**, 221-240.
- Igel, H., Djikpéssé, H. and Tarantola, A. (1993). Waveorm inversion of marine seismograms for P-impedance and Poisson's ratio, *Geophys. J. Int.*, **124**, 363-371.
- Ikelle, L. T., Diet, J. P., Tarantola, A. (1986). Linearized inversion of multioffset seismic reflection data in the ω - k domain, *Geophysics*, **53**, 50-64.
- Jaynes, E.T. (1957). Information theory and statistical mechanism. *Phys. Rev.*, **106**, 171-190.
- Jeffreys, H. (1939). Theory of probability. *Oxford University Press*.
- Jurado, F. (1992). Modélisation sismique et inversion non-linéaire pour les milieux 3-D élastiques tabulaires. *Thèse de doctorat*. Université de Montpellier.
- Jurado, F., Cueur, M. and Richard, V. (1995). 1-D layered media: Part 2, Layer-based waveform inversion, *Geophysics*, **60**, 1843-1856.
- Kennett, B.L.N. and Kerry, N.J. (1979). Seismic waves in a stratified half space, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **57**, 557-583.
- Kennett, B.L.N. (1983). *Seismic wave propagation in stratified media*, Cambridge University Press.

- Kormendi, F. and Dietrich, M. (1991). Nonlinear waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified elastic media, *Geophysics*, **56**, 664-674.
- Kormendi, F. (1989). Inversion non linéaire de sismogrammes Tau- P en milieu stratifié élastique à l'aide du critère des moindres carrés, *Thèse, université de Bretagne occidentale*.
- Lines, L.R. et Treitel, S. (1984). Tutorial: a review of least-squares inversion and its application to geophysical problems, *Geophys. Prosp.*, **32**, 2, 159-186.
- Lions, J.L. (1968). *Contrôles de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Paris, France: Dunod-Gauthier Villars.
- Marchenko, V. (1955). The construction of the potential energy from phases of the scattered waves, *Doklady Akademii Nauk SSSR* (in russian), **104**, 695-698.
- Marroquin, J., Mitter S. and Poggio, T. (1987). Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision, *J. Am. Stat. Assoc.*, **82**, 76-89.
- Mead, L.R. and Papanicolau, N. (1984). Maximum Entropy in the problem of moments. *J. Math. Phys.*, **25**, 2404-2417.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N. Teller, A.H. and Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.*, **1**, 1087-1092.
- Morse et Feschbach, H. (1953). *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill.
- Mosegaard, K. and Tarantola, A. (1995). Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems, *J. Geophys. Res.*, **100**, 12,431-12,447.
- Mora, P., (1987), Elastic inversion of multioffset seismic amplitude data for P-wave velocity, S-wave velocity, and density, in Danbom, S., and domonico, N., Eds. Shear wave exploration, *Soc. Explor. Geophys.*
- Müller, G. (1985). The reflectivity method: a tutorial, *J. Geophysics*, **58**, 153-173.
- Nash, J.C. (1979). Compact numerical methods for computers: linear algebra and functions minimisation, published by Adam Hilger Ltd, Bristol, U.K., printed by the *Pitman Press*, Bath, U.K.

- Newton, R.G. (1981). Inversion of reflection data: A review of exact methods, *Geophysics. J. R. astr. Soc.*, **65**, 191-215.
- Powell, M.J.D. (1981). Approximation theory and methods, *Cambridge University Press*, Cambridge.
- Ostrander, W.J. (1984). Plane-wave reflectio coefficients for gas sands at nonnormal angles of incidence, *Gepphysics*, **49**, 1637-1648.
- Pan, G.S., Phinney, R.A. and Odom, R.I. (1988). Full-waveform inversion of plane-wave seismograms in stratified acoustic media, Theory and feasibility, *Geophysics*, **53**, 21-31.
- Petit, J.L. (1997). Inversion élastique 3D de profils sismiques verticaux en milieux stratifiés horizontalement. *Thèse Université Montpellier II*.
- Polak, E. and Ribière, G. (1969). Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées, *Revue Fr. Inf. Rech. Oper.*, **16**, 35-43.
- Press, F. (1968). Earth models obtained by Monte-Carlo inversion, *J. Geophys. Res.*, **73**, 5223-5234.
- Scales, J.A. and Smith, M.L. (1995). Introductory geophysical inverse theory. *Samizdat Press*.
- Scales, J.A. and Tarantola, A. (1995). An example of geologic prior information in a Bayesian seismic inversion calculation. Center for Wave Phenomena Report, CWP 159.
- Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell Systems Technical Jour.*, **27**, 379-423, 623-656.
- Takeuchi, H. and Saito, M. (1971). Seismic Surface Waves, in *Methods of computational Physics*, **11** ed. B. A. Bolt, Academic Press, New York.
- Tarantola, A. and Valette, B. (1982). Inverse problems= quest for information, *J. Geophysis.*, **50**, 159-170.
- Tarantola, A. (1984). Inverse problems of acoustic and elastic waves, in *Inverse Problems of Acoustic and Elastic Waves*, pp. 104-181, Santosa, F., Pao, Y.-H, Symes, W.W. and Holland, C., Eds., SIAM, Philadelphia.

- Tarantola, A. (1986). A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data, *Geophysics*, **51**, 1893-1903.
- Tarantola, A. (1987). Inversion of travel times and seismic waveforms, pp. 135-157, *Seismic tomography*, Eds., G. Nolet.
- Thomson, W.T. (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *J. Appl. Phys.*, **21**, 89-93.
- Trorey, A.W. (1970). A simple theory for seismic diffractions, *Geophysics*, **35**, 762-784.
- Virieux, J. (1986). P-Sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method, *Geophysics*, **51**, 889-901.
- Ware, J.A. and Aki, K. (1969). Continuous and discrete inverse scattering problems in a stratified elastic medium. I. Plane waves at normal incidence, *J. acoust. Soc. Am.*, **45**, 911-921.
- Wood, T. W. and Lindwall, D. A. (1996). Full waveform inversion of field sonar returns for a Visco-Acoustic earth; A comparison of linearized and fully nonlinear methods, IEE, *Journal of oceanic engineering*, **21**, 423-431.
- Wiggins, R.A. (1969). Monte Carlo inversion of body wave observations, *J. Geophys. Res.*, **74**, 3171-3181.
- Wiggins, R.A. (1972). The linear inverse problems: implication of surface waves and free oscillations for earth structure, *Rev. Geophys.*, **10**, 251-285.
- Yao, Z.X. and Harkrider, D. G. (1983). A Generalized reflection-transmission coefficient matrix and discrete wavenumber method for synthetic seismograms, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **73**, 1685-1699.

Annexes

Annexe 1

EXPRESSION DU CHAMP DIFFRACTÉ AU PREMIER ORDRE DANS LE DOMAINE FREQUENCE-NOMBRE D'ONDE

Le développement au premier ordre du champ diffracté par une hétérogénéité ponctuelle s'écrit (Tarantola, 1984, eq. 4.8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial \rho(\mathbf{x})} &= -\dot{G}_{ji}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_R) * \dot{u}_j(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial \lambda(\mathbf{x})} &= -G_{iii}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_R) * u_{mm}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial u_i(\mathbf{x}_R, t)}{\partial \mu(\mathbf{x})} &= -G_{lik}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_R) * u_{kl}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\quad (\text{A.I.1})$$

(Se référer à l'article pour la signification de chacun des termes de ces équations)

On rappelle la convention sur les indices pour le développement des tenseurs:

$$u_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) \quad \text{et} \quad G_{ijk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{ik}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{jk}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')}{\partial x_i} \right)$$

Sachant que la dérivée temporelle d'une fonction f dans l'espace de Fourier s'écrit:

$$-i\omega \bar{f}(\omega)$$

La transformation du système 1 dans le domaine fréquence nombre d'onde et linéaire et s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i(z_R, k_x, k_y, \omega)}{\partial \rho(z)} &= \omega^2 \bar{G}_{ji}(z, \omega, k_x, k_y; z_R) \cdot \bar{u}_j(z, k_x, k_y, \omega) \\ \frac{\partial \bar{u}_i(z_R, k_x, k_y, \omega)}{\partial \lambda(z)} &= -\bar{G}_{iii}(z, \omega, k_x, k_y; z_R) \cdot \bar{u}_{mm}(z, k_x, k_y, \omega) \\ \frac{\partial \bar{u}_i(z_R, k_x, k_y, \omega)}{\partial \mu(z)} &= -\bar{G}_{lik}(z, \omega, k_x, k_y; z_R) \cdot \bar{u}_{kl}(z, k_x, k_y, \omega)\end{aligned}\quad (\text{A.I.2})$$

k_x et k_y représentent les nombres d'ondes selon x et y . ω est la fréquence du signal z_R est la profondeur du récepteur et z est celle du diffracteur pour simplifier les notations nous posons:

$$\begin{aligned}
\bar{G}_{ji}(z, \omega, k_x, k_y, z_R) &= \bar{G}_{ji} \\
\bar{u}_{ij}(z, \omega, k_x, k_y) &= \bar{u}_{ij} \\
\bar{u}_i(z_R, \omega, k_x, k_y) &= \bar{u}_i \\
\rho(z) &= \rho \\
\lambda(z) &= \lambda \\
\mu(z) &= \mu
\end{aligned} \tag{A.I. 3}$$

en développant (A.I.2) on obtient:

$$\begin{aligned}
(1) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} &= -\omega^2 (\bar{G}_{1i} \cdot \bar{u}_1 + \bar{G}_{2i} \cdot \bar{u}_2 + \bar{G}_{3i} \cdot \bar{u}_3) \\
(2) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda} &= -\sum_{l=1}^{l=3} \sum_{m=1}^{m=3} \frac{\partial \bar{G}_{li}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial x^m} \\
(3) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \mu} &= -\sum_{l=1}^{l=3} \sum_{m=1}^{m=3} \left(\frac{\partial \bar{G}_{li}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x^k} \right) + \left(\frac{\partial \bar{G}_{li}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x^l} \right) + \\
&\quad \left(\frac{\partial \bar{G}_{ki}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x^k} \right) + \left(\frac{\partial \bar{G}_{ki}}{\partial x^l} \cdot \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x^l} \right)
\end{aligned} \tag{A.I. 4}$$

Nous développons ces égalités dans un système de coordonnées cartésiennes. Nous supposons une ligne source parallèle à l'axe y . Une source ponctuelle dans la direction x ou z ne génère alors aucun déplacement selon y , de même une force selon y ne génère aucune composante de mouvement selon l'axe des x ou des z

on écrit pour le premier terme (1):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} = \omega^2 (\bar{G}_{1i} \cdot \bar{u}_1 + \bar{G}_{3i} \cdot \bar{u}_3) \tag{A.I.5}$$

Pour le second terme (2):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda} = -\left(\frac{\partial \bar{G}_{1i}}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{G}_{3i}}{\partial x^3} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x^3} \right) \tag{A.I.6}$$

Enfin le troisième terme (3):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \mu} &= -2 \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{1i}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x^1} \right) + \left(\frac{\partial \bar{G}_{3i}}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x^3} \right) \right] - \\
&\quad \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{3i}}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{G}_{1i}}{\partial x^3} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x^3} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A.I.7}$$

Pour une force ponctuelle verticale et un déplacement vertical, sachant que l'indice 1 se réfère à la composante x et l'indice 3 à la composante verticale z , les expressions des dérivées de Fréchet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} &= -\omega^2 (\bar{G}_{xz} \cdot \bar{u}_x + \bar{G}_{zz} \cdot \bar{u}_z) \\
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda} &= -\left(\frac{\partial \bar{G}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{A.I.8}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \mu} = -2 \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{xz}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) \right] - \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial x} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \right) \right]$$

toutes ces expressions sont développées dans le même repère cartésien (x, y, z) . Les déplacements u_x et u_z sont déterminés pour une géométrie telle que la source est à l'origine du repère et la mesure du déplacement est à la position de la perturbation. Pour les termes G_{xz} et G_{zz} , la source est au niveau du récepteur et la mesure est au niveau du point diffractant. Les champs d'ondes déterminés par la méthode de Kennett sont exprimés dans un repère où la source est à l'origine, ainsi, pour garder les notations de Kennett, les termes u_x et u_z seront exprimés par rapport à un repère (x, y, z) et les termes G_{xz} et G_{zz} par rapport à un deuxième repère (x', y, z) tel que $x' = -x$

Ainsi, la transformée de Fourier par rapport à la dérivée spatiale x s'écrit:

$-ik_x F(k_x)$ pour les propagations allant de la source au point diffractant (\bar{u}_x et \bar{u}_z)

$ik_x F(k_x)$ pour les propagations allant du récepteur au point diffractant (\bar{G}_{xz} et \bar{G}_{zz})

Dès lors:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} &= \omega^2 (\bar{G}_{xz} \cdot \bar{u}_x + \bar{G}_{zz} \cdot \bar{u}_z) \\
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda} &= -\left(ik_x \bar{G}_{xz} + \frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \right) \cdot \left(-ik_x \bar{u}_x + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{A.I.9}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \mu} = -2 \left[k_x^2 (\bar{G}_{xz} \cdot \bar{u}_x) + \left(\frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \right) \right] - \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{xz}}{\partial z} + ik_x \bar{G}_{zz} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - ik_x \bar{u}_z \right) \right]$$

les variables de mouvement (U, V, W) introduites par Kennett et définies dans le plan P-SV sont reliées aux variables cartésiennes de la façon suivante (Kennett, 1983, eq.2.52):

$$U = i \bar{u}_z$$

$$V = \bar{u}_x$$

et pour le second repère:

$$\bar{G}_{zz} = i \bar{G}_{zz} \text{ (cartésien)}$$

$$\bar{G}_{rz} = -\bar{G}_{xz} \text{ (propagation du récepteur vers le point diffractant)}$$

en substituant ces variables à celles de l'équation (A.I.9) on a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} &= \omega^2 \left(-\bar{G}_{rz} \cdot V - \bar{G}_{zz} \cdot U \right) = -\omega^2 \left(\bar{G}_{rz} \cdot V + \bar{G}_{zz} \cdot U \right) \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda} &= \left(ik \left(-\bar{G}_{rz} \right) + \frac{\partial i \bar{G}_{zz}}{\partial z} \right) \cdot \left(-ikV + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ &= \left(-k \bar{G}_{rz} + \frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \right) \cdot \left(-kV + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \mu} &= -2 \left[k^2 \left(-\bar{G}_{rz} \cdot V \right) + \left(\frac{\partial i \bar{G}_{zz}}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] - \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{rz}}{\partial z} + i k i \bar{G}_{zz} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} - i k i U \right) \right] \\ &= 2 \left[k^2 \left(\bar{G}_{rz} \cdot V \right) + \left(\frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] + \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{rz}}{\partial z} + k \bar{G}_{zz} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + k U \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.I.10})$$

ici k représente le nombre d'onde radial \bar{G}_{rz} représente le déplacement horizontal au niveau de la perturbation pour une source ponctuelle verticale au niveau du récepteur, le théorème de réciprocité permet alors d'écrire:

$$\bar{G}_{rz}(z, \omega; z_R) = \bar{G}_{zr}(z_R, \omega; z) \quad (\text{A.I.11})$$

cette précision permet d'écrire le système équivalent de celui obtenu par Dietrich et Kormendi (1990, eq. 25).

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \rho} = -\omega^2 \left(\bar{G}_{zr} \cdot V + \bar{G}_{zz} \cdot U \right)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \lambda} = \left(-k \bar{G}_{rz} + \frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \right) \cdot \left(-kV + \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \mu} = 2 \left[k^2 \left(\bar{G}_{rz} \cdot V \right) + \left(\frac{\partial \bar{G}_{zz}}{\partial z} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] + \left[\left(\frac{\partial \bar{G}_{rz}}{\partial z} + k \bar{G}_{zz} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial z} + k U \right) \right]$$

Annexe 2

ZONE DE FRESNEL POUR UN MILIEU A GRADIENT

La première zone de Fresnel se définit de la façon suivante: c'est la partie d'une interface telle que l'énergie qui s'y réfléchit arrive en un point de mesure, après un certain temps de propagation, inférieur à une demi-période (pour produire des interférences constructives). Cette situation correspond à la figure A.II.1: deux fronts d'ondes séparés par une distance $\lambda/4$ pour tenir compte du trajet double descente et montée. Cette zone de Fresnel dépend à la fois de la longueur d'onde, donc de la fréquence du signal, de la vitesse de propagation des ondes, et de la courbure du front d'onde, c'est à dire la profondeur du réflecteur par rapport à la source. Dans un milieu homogène cette première zone de Fresnel est, si source et récepteur sont confondus, un cercle de rayon r_f (Figure A.II.1), que l'on détermine facilement pour des réflexions d'ondes P-P.

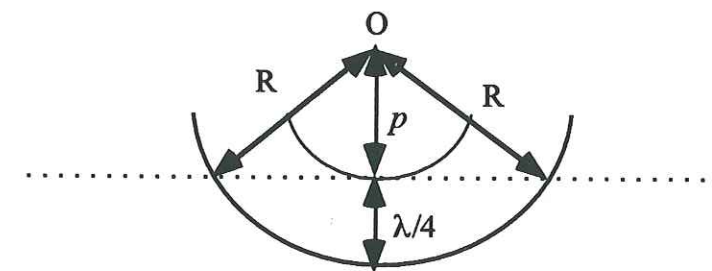


Figure A.II.1: Rayon de la première zone de Fresnel

$$r_F = \sqrt{(\lambda/2)(\lambda/8 + p)} \quad \lambda = V/f$$

Le problème se complique si l'on tient compte d'un éventuel offset entre source et récepteur et aussi des réflexions d'ondes P-SV (Eaton, 1991). Nous allons maintenant présenter une méthode permettant de calculer cette première zone de Fresnel pour un milieu à gradient de vitesse, dans un cas général où source et récepteur ne seront pas confondus, et où nous tiendrons compte des réflexions P-SV. Le problème se présente de la façon suivante: étant

donné un milieu stratifié pour lequel la vitesse des ondes P et S varient de manière linéaire avec la profondeur et s'écrivent:

$$Vp(z)=V0p+k_p z; Vs(z)=V0s+k_s z \quad (\text{A.II.1})$$

où $V0p$, $V0s$ sont les vitesses des ondes P et des ondes S à la surface. k_p et k_s sont les gradients de vitesse des ondes P et S, et z est la profondeur. Dans ce milieu nous plaçons à la surface une source $S(-h, 0, 0)$, et un récepteur $R(h, 0, 0)$, les coordonnées sont exprimées dans un repère cartésien. Nous cherchons la première zone de Fresnel pour une couche de profondeur d . Compte tenu de la définition de la première zone de Fresnel nous pouvons écrire:

$$T/2 = t(\text{SIR}) - t(\text{SCR}) \quad (\text{A.II.2})$$

où le point I décrit la limite de la zone de Fresnel (figure A.II.2), T est la période de l'onde considérée. C est de tous les points appartenants à la zone de Fresnel, celui pour lequel le temps de parcours source zone de Fresnel récepteur est minimum $t(\text{SCR})$. $t(\text{SIR})$ est le temps que met l'onde à parcourir le trajet SIR.

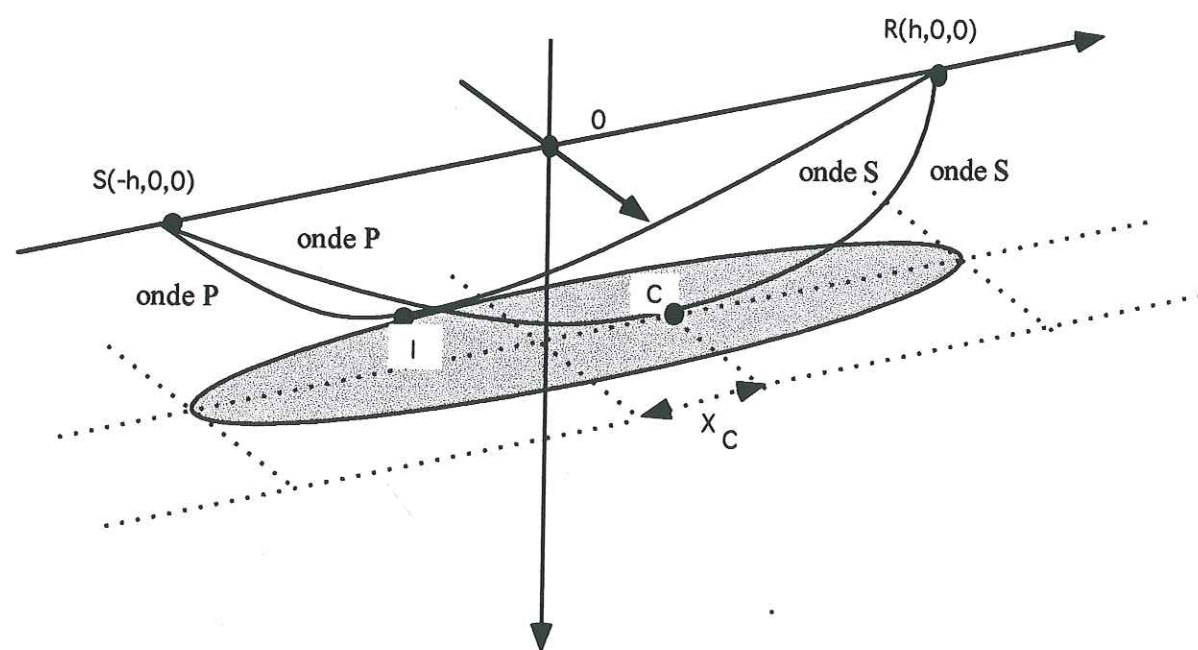


Figure A.II.2: Représentation de la zone de Fresnel pour un milieu à gradient de vitesse pour les ondes P se convertissant en onde S au niveau du réflecteur

Ces temps devront être calculés en tenant compte des conversions d'onde au niveau de la zone de Fresnel. Le temps de parcours d'une onde dans un milieu à gradient de vitesse se détermine de la façon suivante (Dietrich et Cohen 1993 appendix A10):

$$t(\xi, z) = \frac{1}{k_i} \cosh^{-1} \left[\frac{\xi^2 + \hat{z}_i^2 + \hat{z}_{0i}^2}{2\hat{z}_i \hat{z}_{0i}} \right] \quad (\text{A.II.3})$$

où ξ est la distance horizontale séparant la source du récepteur, z la profondeur du réflecteur, l'indice i sera p pour une onde P et s pour une onde S, et les k_i sont les gradients de vitesse. Les notations \hat{z}_i , \hat{z}_{0i} désignent V_i/k_i et V_{0i}/k_i . Alors utilisant les notations de la figure A.II.2 et l'expression qui vient d'être détaillée, l'équation A.II.2 s'écrit:

$$\left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{(h \pm x)^2 + y^2 + \hat{z}_i^2 + \hat{z}_{0i}^2}{\hat{z}_i \hat{z}_{0i}} \right) - \operatorname{arccosh} \left(\frac{(h \pm x_c)^2 + y^2 + \hat{z}_i^2 + \hat{z}_{0i}^2}{\hat{z}_i \hat{z}_{0i}} \right) \right) \times \frac{1}{k_i} \\ \left(\operatorname{arccosh} \left(\frac{(h \pm x)^2 + y^2 + \hat{z}_j^2 + \hat{z}_{0j}^2}{\hat{z}_j \hat{z}_{0j}} \right) - \operatorname{arccosh} \left(\frac{(h \pm x_c)^2 + y^2 + \hat{z}_j^2 + \hat{z}_{0j}^2}{\hat{z}_j \hat{z}_{0j}} \right) \right) \times \frac{1}{k_j} = \frac{T}{2} \quad (21)$$

Cela donne 4 équations puisque qu'il y a 4 combinaisons possibles sur les indices i et j (en effet entre SI ou SC et IR ou CR, nous aurons les phases PP, PS, SP, SS).

La zone de Fresnel correspond à l'enveloppe qui entoure les 4 figures géométriques obtenues en résolvant les 4 équations préalablement décrites. La solution géométrique est représentée sur la figure de l'article.

**THESE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I**

Titre de l'ouvrage:

**INVERSION LINEARISEE DE PROFILS DE SISMIQUE MARINE
EN MILIEU STRATIFIE ELASTIQUE**

Auteur:

Frédéric MOINET

Etablissement:

**Observatoire de Grenoble
Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique**

RESUME

Un programme d'inversion des formes d'ondes sismiques a été développé pour estimer les propriétés d'un milieu stratifié élastique dans le domaine temps-distance. Ce programme est capable de prendre en compte des données hautes fréquences (0-50 Hz) et des milieux finement stratifiés, ce qui en fait une méthode particulièrement adaptée à l'inversion de profils de sismique marine, y compris ceux enregistrés par des sismographes fond de mer.

Le problème inverse est résolu par une technique de moindres carrés généralisée. Cette technique nécessite de pouvoir résoudre rapidement le problème direct et calculer efficacement la matrice des dérivées de Fréchet qui représente la sensibilité au premier ordre des champs d'ondes par rapport à de faibles modifications des paramètres élastiques du modèle. Le problème direct est résolu en utilisant une technique classique de matrices de réflexion-transmission généralisée combinée avec une intégration en nombres d'ondes discrets. Les dérivées de Fréchet sont obtenues sous forme analytique à l'aide des fonctions de Green du milieu non perturbé. Nous proposons deux approches pour calculer ces dérivées. La première consiste à les calculer directement dans le domaine temps-distance en représentant les interfaces par des arrangements réguliers de points diffractants. La deuxième approche est une nouvelle méthode de calcul basée sur une formulation analytique qui permet d'évaluer avec rapidité et précision les dérivées de Fréchet pour une perturbation des paramètres élastiques d'une couche plane d'extension infinie.

La méthode d'inversion proprement dite utilise une technique de gradients conjugués dans le domaine temps-distance, en intégrant toutes les techniques développées précédemment. La méthode est illustrée par des exemples d'inversion de données synthétiques réalistes, mais aussi par des enregistrements réels de type OBS de la campagne Malis en Mer Ligure. La robustesse de la méthode a été étudiée en imposant aux données ou au milieu de propagation certaines erreurs violant les hypothèses de base de l'algorithme. La méthode permet par ailleurs de considérer un grand nombre de géométries source-récepteur et peut s'appliquer en particulier à des enregistrements de profils sismiques verticaux, ainsi qu'à des modèles présentant une forte variabilité des propriétés élastiques suivant la profondeur.

MOTS-CLES

Milieux stratifiés, sismique marine, champs d'ondes complets, sismogrammes synthétiques, méthodes spectrales, dérivées de Fréchet, inversion linéarisée.